

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE

LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université d'Oran

FACULTE DES SCIENCES, DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE



Mémoire de Magister en Mathématique

Thème :

Métriques invariantes à gauche sur les groupes de

Heisenberg de dimension quatre

Présenté par : MEKRI Zouaoui

Soutenu le:.....

Devant le Jury: Mrs. Pr. TERBECHE Mekki (Président)

Dr. BELKHELFA Mohamed (Examineur)

Dr. MORTAD Mohamed Hichem (Examineur)

Pr. BEKKAR Mohammed (Rapporteur).

Année Universitaire 2010/2011

MÉTRIQUES INVARIANTES À
GAUCHE SUR LES GROUPES DE
HEISENBERG DE DIMENSION
QUATRE .

Zouaoui MEKRI

Table des matières

1	Groupes de Heisenberg $H_{(G,L,K)}^f$	5
1.1	Rappels des groupes et Algèbres de Lie	5
1.2	Groupes et Algèbres de Heisenberg.	10
2	Métriques invariantes à gauche sur $H_{(G,L,K)}^f$	26
2.1	Caractérisation des métriques invariantes à gauche sur un groupe de Lie	26
2.2	Classification des métriques invariantes à gauche sur $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$	30
3	Le groupe des isométries d'une métrique invariante à gauche	41
3.1	Les isométries d'une métrique invariante à gauche . . .	41
3.2	Application aux groupes de Heisenberg pseudo-riemanniens $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$	48
4	Distributions totalement géodésiques	51
4.1	Hyper-surfaces totalement géodésiques dans les groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$	51

INTRODUCTION.

On s'intéresse dans ce mémoire aux groupes de Heisenberg de dimension quatre . Pour les définir d'une manière cohérente, on est amené à introduire les groupes $H_{(G,L,K)}^f$ qui généralisent les groupes $H_{(p,q)}$ de GOZE et HARAGUCHI [15] .

Le chapitre I contient un bref rappel des définitions et principaux résultats sur les groupes de Lie utilisés dans le reste du mémoire . On y introduit ensuite les groupes $H_{(G,L,K)}^f$: Ce sont des groupes qui sont associés à un triplet de groupes de Lie G, L, K par un bi-homomorphisme de groupes de Lie :

$$f : G \times L \longrightarrow Z(K)^1$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y).$$

On récupère de cette construction les cas particuliers suivants :

- 1) Les groupes de Heisenberg H_{2p+1} en prenant $G = L = R^p$ et $K = R$.
- 2) Les groupes de GOZE et HARAGUCHI [15] en prenant $G = R^q, K = R^p, L = Hom(R^q, R^p)$.
- 3) Le groupe $H_{(2,1,1)}$ en prenant $G = R^2, L = K = R$, et le groupe $H_{(1,1,2)}$ en prenant $G = L = R, K = R^2$. Ces deux derniers groupes sont nilpotents de dimension quatre et ne sont pas prévus dans la construction de GOZE et HARAGUCHI [15].

Un premier fait important est qu'en dimension quatre , il existe à isomorphismes près deux et seulement deux groupes de Heisenberg réels simplement connexes . Ce sont les deux groupes non isomorphes : $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$.

Un deuxième fait est que les groupes $H_{(G,L,K)}^f$ ne sont en général nilpotents ni même résolubles que si les groupes G, L, K le sont . Et c'en est une condition nécessaire et suffisante .

Parallèlement , dans le même chapitre sont introduites les Algèbres de Heisenberg $\mathcal{H}_{(\mathcal{G},\mathcal{L},\mathcal{K})}^F$ qui sont associées à un triplet d'Algèbres de Lie $\mathcal{G}, \mathcal{L}$ et $\mathcal{K}$ par un bi-homomorphisme d'Algèbres de Lie :

$$F : \mathcal{G} \times \mathcal{L} \longrightarrow Z(\mathcal{K})^2$$

$$(X, Y) \longrightarrow F(X, Y)$$

On montre que les Algèbres $\mathcal{H}_{(\mathcal{G},\mathcal{L},\mathcal{K})}^F$ sont les Algèbres de Lie des groupes $H_{(G,L,K)}^f$.

1. $Z(K)$ désigne le centre du groupe de Lie K .
2. $Z(\mathcal{K})$ désigne de même le centre de l'Algèbre de Lie $\mathcal{K}$.

Dans le chapitre II on étudie les métriques invariantes à gauche sur un groupe de Lie G . On est amené par la nature des choses à donner une classification des métriques riemanniennes ou pseudo-riemanniennes invariantes à gauche sur les groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$:

Dans [16] GOZE et PIU ont donné une classification à automorphismes de l'algèbre $\mathcal{H}_{2p+1}$ près des métriques riemanniennes invariantes à gauche sur les groupes de Heisenberg H_{2p+1} .

Par ailleurs S.RAHMANI [19] a donné de son côté une classification à automorphismes de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_3$ près de toutes les métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur le groupe H_3 .

Les résultats essentiels du chapitre II sont donc :

- 1) un théorème de classification des métriques riemanniennes sur les groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$ non prévu par la classification de GOZE et PIU [16].
- 2) deux résultats de classification des métriques pseudo-riemanniennes de signatures respectives $(3,1)$ et $(2,2)$ sur les mêmes groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$. Ce sont les analogues en dimension quatre du théorème de classification de S.RAHMANI [19].

Le chapitre III étudie les groupes des isométries des groupes de Heisenberg de dimension quatre. On a commencé par déterminer en général le groupe des isométries d'un groupe de Lie G nilpotent, muni d'une métrique riemannienne g invariante à gauche, et d'un groupe de Lie G nilpotent d'indice $= 2$ muni d'une métrique pseudo-riemannienne g invariante à gauche et dont le centre ne contient pas de vecteurs isotropes. On observe alors un phénomène important : Le sous groupe des isométries de g laissant invariant l'élément neutre est un sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe G ⁽³⁾. Dans les deux cas, on a plus précisément :

$$Isom(G, g) = G \ltimes \left\{ \Psi \in Aut(G) \quad \text{tels que} \quad D_e \Psi \in O(T_e G, Q) \right\}.$$

où $O(T_e G, Q)$ désigne le groupe des applications de $T_e G$ orthogonales relativement à la forme quadratique Q .

La version riemannienne est due à E.N.Wilson [21].

On en a donné des applications aux groupes de Heisenberg de dimension quatre $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$ munis de métriques pseudo-riemanniennes.

Dans le chapitre IV, on est confronté à un autre phénomène :

On constate en effet que le théorème de Th.HANGAN [10] qui affirme que dans le groupe riemannien H_{2p+1} toute distribution intégrable D totalement géodésique est au moins de codimension 2, est mis en défaut en dimension quatre.

3. Le cas particulier de R^n est connu : toute isométrie est un déplacement.

D'ailleurs le contraste entre la structure riemannienne et la structure pseudo-riemannienne du groupe H_{2p+1} a été observé par N et S . RAHMANI [20] en montrant par un contre-exemple que le théorème de Th.HANGAN n'est pas vrai pour une métrique Lorentzienne plate de H_3 .

Il nous semble que ce phénomène est très subtile , et qu'il est indépendant du caractère riemannien ou pseudo-riemannien des groupes de Heisenberg !

On montre en effet par deux contre-exemples que le théorème de T.HANGAN n'est pas valable aussi dans les deux groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$ même pour une métrique riemannienne !!!

Il demeure donc ouvert le problème de caractériser en général les groupes de Heisenberg $H_{(G,L,K)}^f$ pour lesquels le théorème de Th.HANGAN est valable . On pose plus précisément le problème suivant :

Problème.

Soit $H_{(G,L,K)}^f$ le groupe de Heisenberg⁽⁴⁾ associé a un triplet de groupes de Lie G , L , K par un bi-homomorphisme de groupes de Lie :

$$f : G \times L \longrightarrow Z(K)$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

On suppose que $H_{(G,L,K)}^f$ est muni d'une métrique invariante à gauche g . Quelles conditions doivent vérifier d'une part les groupes de Lie G , L , K et le bi-homomorphisme de groupes de Lie f et d'autre part la métrique g pour que toute distribution intégrable totalement géodésique D sur le groupe de Heisenberg $H_{(G,L,K)}^f$ soit au moins de codimension égale à $\dim Z(K) + 1$?

4. Tel qu'il est défini dans le chapitre I de ce mémoire.

Chapitre 1

Groupes de Heisenberg $H^f_{(G,L,K)}$

1.1 Rappels des groupes et Algèbres de Lie

Dans cette section , on rappelle les notions essentielles sur les groupes de Lie dont on aura besoin dans ce mémoire .

1.1.1. La notion de groupe de Lie

La notion de groupe de Lie traduit la compatibilité de deux structures : celle de variété et celle de groupe . On a plus précisément :

Définition 1.1.1 .

Un groupe de Lie est la donnée d'une variété G de classe C^∞ ⁽¹⁾ sur laquelle est définie une structure de groupe telle que :

la multiplication :

$$\begin{aligned}\varphi : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow \varphi(a, b)\end{aligned}\tag{1.1}$$

et l'inversion :

$$\begin{aligned}i : G &\longrightarrow G \\ a &\longrightarrow a^{-1}\end{aligned}\tag{1.2}$$

soient de classe C^∞ .

En d'autres termes , la multiplication et l'inversion conservent la structure de variété différentiable de classe C^∞ du groupe G .

La multiplication $\varphi(a, b)$ sera parfois notée $\varphi(a, b) = a.b$ et l'élément neutre sera désigné par e .

Dans la suite quand il s'agira d'un seul groupe de Lie G , on supposera toujours que $\dim(G) = n$.

1. C'est la classe de régularité des groupes de Lie supposée dans ce mémoire.

Remarque 1.1.1 .

G est un groupe de Lie si et seulement si l'application :

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow a.b^{-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

est de classe C^∞ .

1.1.2. Translations à gauche

A tout élément $a \in G$ fixé , nous associons la transformation τ_a de G dans G appelée translation à gauche et définie par :

$$\begin{aligned} \tau_a : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow \tau_a(x) = a.x \end{aligned} \quad (1.4)$$

Les translations à gauche sont de classe C^∞ , elles vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_a \cdot \tau_b = \tau_{a.b} \\ \tau_e = Id_G \\ (\tau_s)^{-1} = \tau_{s^{-1}} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

1.1.3. La Forme de Maurer-Cartan

Considérons le difféomorphisme défini par la translation à gauche d'élément a^{-1} .

$$\begin{aligned} \tau_{a^{-1}} : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow \tau_{a^{-1}}(x) = a^{-1}.x \end{aligned} \quad (1.6)$$

Il envoie l'élément a en l'élément neutre e , et par suite sa différentielle :

$$\begin{aligned} \tau'_{a^{-1}}(a) : T_a(G) &\longrightarrow T_e(G) \\ h &\longrightarrow \tau'_{a^{-1}}(a)[h] \end{aligned} \quad (1.7)$$

est un isomorphisme de $T_a(G)$ dans $T_e(G)$.

Définition 1.1.2 .

La 1-forme différentielle vectorielle ω définie en tout point $a \in G$ par :

$$\begin{aligned} \omega_a : T_a(G) &\longrightarrow T_e(G) \\ h &\longrightarrow \omega_a[h] = \tau'_{a^{-1}}(a)[h]. \end{aligned}$$

est appelée la forme différentielle de Maurer-Cartan du groupe G .

Remarque 1.1.2 .

Par définition , on a :

$$\omega \in \bigwedge^1 (G; T_e(G)) \quad (1.8)$$

1.1.4. Propriétés des fonctions φ et de la forme ω

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales au voisinage du point x .

La base correspondante de l'espace tangent $T_x G$ est $B = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ qu'on note parfois : $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, sa base duale est : $B^* = \{dx_1, \dots, dx_n\}$.

Supposons que la multiplication du groupe est définie dans le système $(x_1, \dots, x_n)$ par les fonctions φ_i :

$$\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$$

On lui associe alors deux matrices :

$$V(x) = (v_{ij}(x)) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x^{-1}, x) \right). \quad (1.9)$$

$$S(x) = (s_{ij}(x)) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x, e) \right). \quad (1.10)$$

De la définition de la matrice $V(x)$, et de la forme de Maurer-Cartan ω , on obtient la :

Proposition 1.1.1 .

Dans le système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ la forme de Maurer-Cartan du groupe de Lie G s'écrit :

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

avec :

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{j=n} v_{ij}(x) dx_j \quad (1.12)$$

Remarque 1.1.3 .

La proposition signifie que dans le système $(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de ω est

$$V(x) = (v_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n} \quad (1.13)$$

Remarque 1.1.4 .

En différentiant en e les deux membres de l'égalité : $\varphi(e, x) = x$ on obtient les propriétés simples suivantes :

$$V(e) = S(e) = I_n. \quad (1.14)$$

Ce qui se traduit pour la forme de Maurer-cartan ω par :

$$\omega_e = Id_{T_e(G)} \quad (1.15)$$

Théorème 1.1.1 *Le premier théorème de Lie .
(première version)*

Soit G un groupe de Lie , ω sa forme de Maurer-Cartan ; alors :

ω est invariante par les translations à gauche de G .

Preuve 1.1.1 (voir [14]).

Corollaire 1.1.1 :

Soit G un groupe de Lie de forme de Maurer-Cartan ω . Posons pour tout espace vectoriel E , et pour toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(T_e(G); E)$:

$$\psi = f \circ \omega.$$

La 1-forme différentielle $\psi \in \bigwedge^1(G; E)$ est invariante par les translations à gauche du groupe G .

Preuve 1.1.2 .

La preuve est évidente . Il suffit de remarquer que :

$$\tau_a^*(f \circ \omega) = f \circ (\tau_a^* \omega)$$

D'après le premier théorème de Lie $\tau_a^* \omega = \omega$, d'où le résultat.

Théorème 1.1.2 *Premier théorème de Lie .
(deuxième version.)*

Dans tout système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de e , les fonctions $\varphi_i(t, x)$ qui définissent la multiplication du groupe G considérées comme fonctions de x sont solutions du système d'équations aux dérivées partielles :

$$\sum_{k=1}^{k=n} v_{ik}(\varphi(t, x)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(t, x) = v_{ij}(x). \quad (1.16)$$

avec les conditions initiales :

$$\varphi_i(t, x) = t_i. \quad (1.17)$$

Preuve 1.1.3 .

voir [1]

Théorème 1.1.3 *Deuxième théorème de Lie .*
(Première version.)

Soient G un groupe de Lie et ω sa forme de Maurer-Cartan . Alors :

$$d\omega + [\omega, \omega] = 0.$$

Remarque 1.1.5 .

Le crochet $[,]$ dans le théorème (1.1.3) désigne le crochet de l'Algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur G . Et la 2-forme différentielle $[\omega, \omega]$ est définie par :

$$[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)].$$

Preuve 1.1.4 .

voir[14]

Théorème 1.1.4 *Deuxième théorème de Lie .*
(deuxième version .)

Il existe des constantes $C_{j,k}^i$ avec $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ telles que :

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left(s_{\lambda,j} \frac{\partial s_{l,k}}{\partial x_{\lambda}} - s_{\lambda,k} \frac{\partial s_{l,j}}{\partial x_{\lambda}} \right) = \sum_{i=1}^{i=n} C_{j,k}^i s_{l,i}.$$

Remarque 1.1.6 (Pour une démonstration voir [1]).

La première version du deuxième théorème de Lie porte sur la forme de Maurer-cartan ω du groupe de lie G .

par contre , la deuxième version porte sur les champs de vecteurs invariants à gauche . C'est une " version duale " .

Théorème 1.1.5 *Troisième théorème de Lie .*

Les constantes de structure satisfont les relations suivantes :

1)L'antisymétrie :

$$C_{jk}^i = -C_{kj}^i$$

2)Les identités de Jacobi :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(C_{jk}^i C_{il}^s + C_{kl}^i C_{ij}^s + C_i^{lj} C_{ik}^s \right) = 0.$$

Remarque 1.1.7 (Commentaire .)

L'attribution des théorèmes (1.1.2, page 8),(1.1.4, page 9),(1.1.5,page 9) à S.Lie existe dans le livre de J.BASS [1].

S.LIE a exposé ses résultats sur les groupes portant son nom sous forme de six théorèmes : trois directs et trois réciproques . Il les a formulés en termes d'équations aux dérivées partielles ⁽²⁾.

À l'époque (fin 19^{ieme} siècle) le langage des formes différentielles n'était pas encore familier . Les premières versions de ses premier théorèmes n'ont été formulées qu'après l'introduction des formes différentielles dans les travaux des géomètres du début du 20^{ieme} siècle .

Corollaire 1.1.2 .

Les matrices $V(t)$ et $S(t)$ sont inverses l'une de l'autre .

Preuve 1.1.5 .

C'est une conséquence de la deuxième version du théorème de Lie.

1.2 Groupes et Algèbres de Heisenberg.

Les groupes de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg H_{2n+1} est le groupe nilpotent des matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n & z \\ 0 & 1 & \dots & 0 & y_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Il est muni de la métrique invariante à gauche :

$$ds_H^2 = \sum_{j=1}^{j=n} (dx_j^2 + dy_j^2) + (dz + \sum_{j=1}^{j=n} (y_j dx_j - x_j dy_j))^2$$

Les groupes H_{2n+1} ont fait l'objet de très nombreuses études . Dans l'une d'elles Goze et Haraguchi [8] ont introduit les groupes $H(p, r)$ généralisant H_{2n+1} . Pour p et r deux entiers > 0 , le groupe $H(p, r)$ est le produit :

$$H(p, r) = \mathcal{M}_{1p} \times \mathcal{M}_{pr} \times \mathcal{M}_{1r}.$$

2. C'est la version de J.BASS [1]

de trois groupes abéliens (additifs) de matrices de dimensions respectives :
 $1 \times p, \quad p \times r, \quad 1 \times r$.

Il est muni de la multiplication :

$$m(x, y, z) * m'(x', y', z') = m''(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(x.y' - x'.y))$$

qui en fait un groupe de Lie nilpotent.

L'objet de cette section est de montrer qu'on peut associer à trois groupes de Lie G , L et K par un bi-homomorphisme (³)

$$f : G \times L \longrightarrow Z(K).$$

un groupe de Lie $H_{(G,L,K)}^f$ qui généralise les groupes $H(p, r)$ de Goze et Haraguchi [8], [11], [15].

Proposition 1.2.1 .

Soient $(G, *)$, (L, Δ) , $(K, .)$ trois groupes de Lie d'éléments neutres respectifs e, e', e'' , $Z(K)$ le centre de K .

et

$$f : G \times L \longrightarrow Z(K).$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

un bi-homomorphisme de groupes de Lie . Le produit :

$$H_{(G,L,K)}^f = G \times L \times K.$$

muni de la multiplication :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * x' \\ y \Delta y' \\ z.z'.f(x', y). \left(f(x, y') \right)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

est un groupe de Lie .

Preuve 1.2.1 .

Étant donné que f est un bi-homomorphisme de groupes, et qu'il prend ses valeurs dans $Z(K)$ qui est commutatif alors :

1) La multiplication $\star$ est une loi de composition interne .

3. f est différentiable relativement à chacune des variables

2) $e_0 = \begin{pmatrix} e \\ e' \\ e'' \end{pmatrix}$ est un élément neutre pour la multiplication $\star$

3) tout élément $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ possède un inverse qui est $\begin{pmatrix} x^{-1} \\ y^{-1} \\ z^{-1} \end{pmatrix}$.

4) Par ailleurs , on a pour trois éléments de $H_{(G,L,K)}^f$:

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

$$(u \star v) \star w = \begin{pmatrix} (x * x') * x'' \\ (y \triangle y') \triangle y'' \\ \left(z.z'.f(x', y).f(x, y')^{-1}.z''.f(x'', y \triangle y').f(x * x', y'')^{-1} \right) \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$u \star (v \star w) = \begin{pmatrix} x * (x' * x'') \\ y \triangle (y' \triangle y'') \\ z.z'.z''.f((x'', y').f(x', y'')^{-1}.f(x' * x''), y).f(x, y' \triangle y'')^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

sachant que les lois $*$, $\triangle$, $.$ sont associatives , la comparaison de (1.19) et (1.20) montre que $\star$ est associative. Ainsi $H_{(G,L,K)}^f$ est un groupe .

Le groupe $H_{(G,L,K)}^f$ est un groupe de Lie car G , L , K et le bi-homomorphisme f sont différentiables .

Définition 1.2.1 .

Le groupe $H_{(G,L,K)}^f$ s'appelle groupe de Heisenberg ⁽⁴⁾ associé au triplet de groupes G , L , K par le bi-homomorphisme f .

Formes différentielles invariantes à gauche sur le groupe de Heisenberg $H_{(G,L,K)}^f$.

Pour construire des 1-formes différentielles vectorielles invariantes à gauche sur le groupe $H_{(G,L,K)}^f$, on est amené à construire sa forme de Maurer-Cartan :

$$\omega^H \in \bigwedge^1 \left(H_{(G,L,K)}^f, T_{e_0}(H_{(G,L,K)}^f) \right).$$

4. C'est une terminologie adoptée dans ce mémoire.

où $T_{e_0}(H_{(G,L,K)}^f)$ est l'espace tangent en l'élément neutre e_0 du groupe ⁽⁵⁾.
En effet , ω^H est invariante à gauche , et elle est universelle dans le sens suivant :

Pour tout espace vectoriel L , et pour toute 1-forme vectorielle invariante à gauche :

$$\mu \in \bigwedge^1 \left(H_{(G,L,K)}^f, L \right)$$

il existe (voir [14]) un isomorphisme $A \in \mathcal{L} \left(T_E(H_{(G,L,K)}^f), L \right)$ tel que :

$$\mu = A.\omega^H$$

Soient alors G , L et K trois les groupes de Lie , et f un bi-homomorphisme de groupes de Lie $G \times L$ dans $Z(K)$.

On se propose dans ce qui suit de calculer la forme de Maurer-Cartan ω^H du groupe de Heisenberg $H_{(G,L,K)}^f$.

Considérons dans $H_{(G,L,K)}^f$ deux éléments : $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$.

La forme de Maurer-Cartan de $H_{(G,L,K)}^f$ est par définition la différentielle de la translation à gauche :

$$\begin{aligned} \tau_v : H_{(G,L,K)}^f &\longrightarrow H_{(G,L,K)}^f \\ u &\longrightarrow \tau_v(u) = \begin{pmatrix} r * x \\ s \triangle y \\ t.z.f(x, s).f(r, y)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

par rapport à u avec $v = u^{-1}$.

Le calcul de la matrice Jacobienne donne :

$$\frac{\partial \tau_v}{\partial u} \Big|_{v=u^{-1}} = \begin{pmatrix} \partial_x(r * x)|_{r=x^{-1}} & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & \partial_y(s \triangle y)|_{s=y^{-1}} & , & 0 \\ f(x, y). \partial_x f(x, y^{-1}) & , & f(x, y^{-1}). \partial_y f(x, y) & , & \partial_z(t.z)|_{t=z^{-1}} \end{pmatrix}.$$

On a ainsi deux 1-formes différentielles partielles :

$$\pi_{f_{y^{-1}}} = f(x, y).d_x f(x, y^{-1}) \in \bigwedge^1 (G, T_{f(x, y^{-1})}(Z(K))) \quad (1.21)$$

5. C'est son Algèbre de Lie .

$\pi_{f_{y^{-1}}}$ est la différentielle de Darboux de l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow Z(K) \\ x &\longrightarrow f_{y^{-1}}(x) = f(x, y^{-1}). \\ \pi_{f_x} &= f(x, y^{-1}).d_y f(x, y) \in \bigwedge^1 (L, T_{f(x, y)}(Z(K))) \end{aligned} \quad (1.22)$$

De même π_{f_x} est la différentielle de Darboux de l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow Z(K) \\ y &\longrightarrow f_x(x) = f(x, y). \end{aligned}$$

Notations :

Si l'on désigne respectivement par : $\omega^G, \omega^L, \omega^K, \omega^H$ les formes de Maurer-Cartan des groupes de Lie : $G, L, K, H_{(G, L, K)}^f$.

et par $\pi_{L^{-1}}^G(f), \pi_G^L(f)$ respectivement les deux applications :

$$\pi_{L^{-1}}^G(f) : (x, y, z) \longrightarrow \pi_{f_{y^{-1}}}$$

$$\pi_G^L(f) : (x, y, z) \longrightarrow \pi_{f_x}$$

Avec ces notations , nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.2.2 .

La forme de Maurer-Cartan du groupe de Heisenberg $H_{(G, L, K)}^f$ est :

$$\omega^H = \begin{pmatrix} \omega^G \\ \omega^L \\ \pi_{L^{-1}}^G(f) + \pi_G^L(f) + \omega^K \end{pmatrix}.$$

Groupes de Heisenberg reels de dimension = 4.

Exemple 1.2.1 Posons $G = (R^2, +)$ et $L = K = (R, +)$.

Un bi-homomorphisme f de $G \times L$ dans K est de la forme :

$$\begin{aligned} f : R^2 \times R &\longrightarrow R \\ ((x, y), z) &\longrightarrow f((x, y), z) = axz + byz \end{aligned}$$

où a, b sont deux constantes reelles .

On supposera que $a = b = \frac{1}{2}$. Le groupes de Heisenberg associé à G, L, K par

le bi-homomorphisme f sera noté $\mathbf{H}_{(2,1,1)}$. C'est $\mathbf{R}^4$ muni de la multiplication :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \\ t + t' + \frac{1}{2} \cdot (x'z - xz') + \frac{1}{2} \cdot (y'z - yz') \end{pmatrix}$$

Le centre de $\mathbf{H}_{(2,1,1)}$ est $\mathbf{R}$. La forme de Maurer-Cartan de $\mathbf{H}_{(2,1,1)}$ est :

$$\omega = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.2 Posons $G = L = (\mathbf{R}, +)$ et $K = (\mathbf{R}^2, +)$.
Un bi-homomorphisme de $G \times L$ dans K est de la forme :

$$g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow g(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha xy \\ \beta xy \end{pmatrix}$$

On supposera que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Le groupe de Heisenberg associé à G, L, K par le bi-homomorphisme g sera noté $\mathbf{H}_{(1,1,2)}$. C'est $\mathbf{R}^4$ muni de la multiplication :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' + \frac{1}{2}(x'y - xy') \\ t + t' + \frac{1}{2}(x'y - xy') \end{pmatrix}$$

Le centre de $\mathbf{H}_{(1,1,2)}$ est $\mathbf{R}^2$. La forme de Maurer-Cartan de $\mathbf{H}_{(1,1,2)}$ est :

$$\omega = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \\ dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \end{pmatrix}$$

Représentations lineaires

des groupes de Heisenberg de dimension 4.

1) Une représentation linéaire de $H_{(2,1,1)}$.

Considérons le groupe de Lie nilpotent $G_{(2,1,1)}$ des matrices de la forme :

$$\varrho(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 1 & x & z & t \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4.$$

muni de la multiplication usuelle des matrices .

$$G_{(2,1,1)} \subset Gl(4, R).$$

L'application :

$$\begin{aligned} \varrho : H_{(2,1,1)} &\longrightarrow G_{(2,1,1)} \\ (x, y, z, t) &\longrightarrow \varrho(x, y, z, t) \end{aligned}$$

est une représentation linéaire du groupe de Heisenberg $H_{(2,1,1)}$.

2) Une représentation linéaire de $H_{(1,1,2)}$.

De même , soit $G_{(1,1,2)}$ le groupe de Lie nilpotent des matrices de la forme :

$$\rho(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 1 & x & z & t \\ 0 & 1 & y & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4.$$

muni de la multiplication usuelle des matrices .

$$G_{(1,1,2)} \subset g(4, R)$$

L'application :

$$\begin{aligned} \rho : H_{(1,1,2)} &\longrightarrow G_{(1,1,2)} \\ (x, y, z, t) &\longrightarrow \rho(x, y, z, t). \end{aligned}$$

est une représentation linéaire du groupe de Heisenberg $H_{(1,1,2)}$.

Les Algèbres de Heisenberg.

Soient $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ trois Algèbres de Lie . $Z(\mathcal{K})$ le centre de $\mathcal{K}$.

$$F : \mathcal{G} \times \mathcal{L} \longrightarrow Z(\mathcal{K})$$

$$(X, Y) \longrightarrow F(X, Y)$$

un bi-homomorphisme (⁶) d'Algèbre de Lie .

On définit sur la somme $\mathcal{G} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{K}$ la multiplication $[,]$ de deux vecteurs :

$$U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

de la manière suivante :

$$[U, V] = \begin{pmatrix} [X, X']_{\mathcal{G}} \\ [Y, Y']_{\mathcal{L}} \\ [Z, Z']_{\mathcal{K}} + F(X', Y) - F(X, Y') \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

6. Homomorphisme d'Algèbre de Lie relativement à chacune des variables.

Lemme 1.2.1 .

La multiplication $[,]$ définie sur la somme $\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{K}$ par l'équation (1.23) vérifie pour trois vecteurs :

$$U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} \in \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{K}$$

l'identité suivante :

$$[[U, V], W] = \begin{pmatrix} [[X, X'], X'']_{\mathfrak{G}} \\ [[Y, Y'], Y'']_{\mathfrak{L}} \\ [[Z, Z'], Z'']_{\mathfrak{K}} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Preuve 1.2.2 (Preuve du lemme.)

Soient :

$$U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{(\mathfrak{G}, \mathfrak{L}, \mathfrak{K})}^F$$

on a :

$$[[U, V], W] = \begin{pmatrix} [[X, X'], X'']_{\mathfrak{G}} \\ [[Y, Y'], Y'']_{\mathfrak{L}} \\ [[Z, Z'], Z'']_{\mathfrak{K}} + [F(X', Y), Z'']_{\mathfrak{K}} - [F(X, Y'), Z'']_{\mathfrak{K}} \\ \quad + F(X'', [Y, Y']) - F([X, X'], Y'') \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Or dans la troisième composante de (1.25) on a :

$$[F(X', Y), Z'']_{\mathfrak{K}} = [F(X, Y'), Z'']_{\mathfrak{K}} = 0$$

car F prend ses valeurs dans le centre de $\mathfrak{K}$.

de même :

$$F(X'', [Y, Y']) = [F(X'', Y), F(X'', Y')]_{\mathfrak{K}}.$$

car F est un homomorphisme d'Algèbres de Lie .

Et du moment que F prend ses valeurs dans le centre de $\mathfrak{K}$, on obtient :

$$F(X'', [Y, Y']) = 0$$

d'où :

$$[[U, V], W] = \begin{pmatrix} [[X, X'], X'']_{\mathcal{G}} \\ [[Y, Y'], Y'']_{\mathcal{L}} \\ [[Z, Z'], Z'']_{\mathcal{K}} \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve le lemme .

Notations :

Notons par : $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ la somme $\mathcal{G} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{K}$ munie de la multiplication $[,]$ définie dans l'équation (1.23) .

Proposition 1.2.3 .

$\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ est une Algèbre de Lie .

Preuve 1.2.3 (Preuve de la proposition.)

Le crochet (1.23) de la définition est bilinéaire et antisymétrique . Il suffit de vérifier l'identité de Jacobi .

Soient trois vecteurs :

$$U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$$

d'après le lemme , on a :

$$[[U, V], W] = \begin{pmatrix} [[X, X'], X'']_{\mathcal{G}} \\ [[Y, Y'], Y'']_{\mathcal{L}} \\ [[Z, Z'], Z'']_{\mathcal{K}} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Par une permutation circulaire des variables U , V , W dans (1.26) , et ensuite par sommation , on obtient :

$$[[U, V], W] + [[V, W], U] + [[W, U], V] = 0$$

car les crochets $[,]_{\mathcal{G}}$, $[,]_{\mathcal{L}}$, $[,]_{\mathcal{K}}$ vérifient déjà l'identité de Jacobi respectivement dans les Algèbres de Lie : $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$.

Donc l'identité de Jacobi est vérifiée dans $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ et par conséquent $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ est une Algèbre de Lie .

Définition 1.2.2 .

L'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ s'appelle l'Algèbre de Heisenberg associée au triplet d'Algèbres de Lie $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ par le bi-homomorphisme F ⁽⁷⁾.

Nilpotence et Résolubilité des l'Algèbres de Heisenberg $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$.

Rappels (voir [6], [9] et [13]) :

Soit $\mathbf{L}$ une Algèbre de Lie . Formons les deux suites d'Idéaux :

- 1) La suite centrale descendante : $\mathbf{L}^0 = \mathbf{L}, \mathbf{L}^1 = [\mathbf{L}, \mathbf{L}], \dots, \mathbf{L}^j = [\mathbf{L}, \mathbf{L}^{j-1}]$.
- 2) La suite des Algèbres dérivées : $\mathbf{L}^{(0)} = \mathbf{L}, \mathbf{L}^{(1)} = [\mathbf{L}, \mathbf{L}], \dots, \mathbf{L}^{(j)} = [\mathbf{L}^{(j-1)}, \mathbf{L}^{(j-1)}]$.

Définition 1.2.3 .

On dit que l'Algèbre de Lie $\mathbf{L}$ est nilpotente s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathbf{L}^n = 0$.

On dit que l'Algèbre de Lie $\mathbf{L}$ est résoluble s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathbf{L}^{(n)} = 0$.

Proposition 1.2.4 .

Soit $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ l'Algèbre de Heisenberg associée aux triplet d'Algèbres de Lie : $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ par le bi-homomorphisme F .

On a :

$$\forall \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2 : \quad (\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F)^n = \mathcal{G}^n \oplus \mathcal{L}^n \oplus \mathcal{K}^n. \quad (1.27)$$

$$\forall \in \mathbf{N}^* : \quad (\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F)^{(n)} = \mathcal{G}^{(n)} \oplus \mathcal{L}^{(n)} \oplus \mathcal{K}^{(n)}. \quad (1.28)$$

Preuve 1.2.4 .

Une fois le bi-homomorphisme F qui définit la structure d'Algèbre de Lie sur $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ est fixé , on peut poser pour simplifier les notations : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$.

Faisons la preuve de l'identité (1.27) par récurrence sur $n \geq 2$:

Pour $n=2$, on a en appliquant le lemme (1.2.1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= [\mathcal{H} , [\mathcal{H} , \mathcal{H}]] \\ &= [\mathcal{G} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{K} , [\mathcal{G} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{K} , \mathcal{G} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{K}]] \\ &= [\mathcal{G} , [\mathcal{G} , \mathcal{G}]] \oplus [\mathcal{L} , [\mathcal{L} , \mathcal{L}]] \oplus [\mathcal{K} , [\mathcal{K} , \mathcal{K}]] \\ &= \mathcal{G}^2 \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{K}^2. \end{aligned}$$

Supposons que l'identité (1.27) est vraie jusqu'à l'ordre n , c'est à dire :

$$(\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F)^n = \mathcal{G}^n \oplus \mathcal{L}^n \oplus \mathcal{K}^n \dots \dots \dots (\text{hypothèse de récurrence})$$

7. C'est une autre terminologie adoptée dans ce mémoire.

Pour $n+1$, on a en appliquant le lemme (1.2.1) , et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{n+1} &= [\mathcal{H} , [\mathcal{H} , \mathcal{H}^n]] \\ &= [\mathcal{G} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{K} , [\mathcal{G} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{K} , \mathcal{G}^n \oplus \mathcal{L}^n \oplus \mathcal{K}^n]] \\ &= [\mathcal{G} , [\mathcal{G} , \mathcal{G}^n]] \oplus [\mathcal{L} , [\mathcal{L} , \mathcal{L}^n]] \oplus [\mathcal{K} , [\mathcal{K} , \mathcal{K}^n]] \\ &= \mathcal{G}^{n+1} \oplus \mathcal{L}^{n+1} \oplus \mathcal{K}^{n+1}.\end{aligned}$$

Donc l'identité (1.27) est vraie à l'ordre $n+1$.

Pour le résolubilité , on utilise la même méthode avec l'identité (1.28) , en observant que :

$$\mathcal{H}^{(n+1)} = [\mathcal{H}^{(n)} , [\mathcal{H}^{(n-1)} , \mathcal{H}^{(n-1)}]].$$

La proposition est donc démontrée .

Corollaire 1.2.1 .

Soit $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ l'Algèbre de Heisenberg associée aux triplet d'Algèbres de Lie : $\mathcal{G} , \mathcal{L} , \mathcal{K}$ par le bi-homomorphisme F .

1) $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ est nilpotente si et seulement si les trois Algèbres de Lie $\mathcal{G} , \mathcal{L} , \mathcal{K}$ sont nilpotentes .

2) $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$ est résoluble si et seulement si les trois Algèbres de Lie $\mathcal{G} , \mathcal{L} , \mathcal{K}$ sont résolubles .

Proposition 1.2.5 .

Soient G , L , K trois groupes de Lie , d'Algèbres de Lie respectives :

$\mathcal{G} , \mathcal{L} , \mathcal{K}$, et soit

$$f : G \times L \longrightarrow Z(K).$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

un bi-homomorphisme de groupes de Lie .

Pour deux champs de vecteurs $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{L}$, posons :

$$F(X, Y) = -(X \circ Y + Y \circ X)(f).$$

Alors : l'Algèbre de Lie du groupe de Heisenberg $H_{(G, L, K)}^f$ est l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$.

Preuve 1.2.5 .

Considérons au voisinage de l'élément neutre $e_0 = \begin{pmatrix} e \\ e' \\ e'' \end{pmatrix}$ du groupe $H_{(G, L, K)}^f$

un système de coordonnées locales :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}$$

où les coordonnées de E sont nulles . Soient

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \text{ deux éléments de } H_{(G,L,K)}^f$$

avec :

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour une fonction différentiable Ψ de $H_{(G,L,K)}^f$ dans R , calculons :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_i = \lim_{r_i \rightarrow 0} \frac{1}{r_i} \{ \Psi(\tau_r(u)) - \Psi(u) \}. \\ V_j = \lim_{s_j \rightarrow 0} \frac{1}{s_j} \{ \Psi(\tau_s(u)) - \Psi(u) \}. \\ W_k = \lim_{t_k \rightarrow 0} \frac{1}{t_k} \{ \Psi(\tau_t(u)) - \Psi(u) \} \end{array} \right. . \quad (1.29)$$

les translations à gauche dans les groupes G , L , K :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(r, x) & = & \tau_r x = r * x \\ \chi(s, y) & = & \tau_s y = s \triangle y \\ \psi(t, z) & = & \tau_t z = t.z \end{array} \right. \quad (1.30)$$

considérons alors les champs de vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i = \sum_{l=1}^{l=m} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}(0, x) \frac{\partial}{\partial x_l} \\ Y_j = \sum_{l=1}^{l=n} \frac{\partial \chi_l}{\partial y_j}(0, y) \frac{\partial}{\partial y_l} \\ Z_k = \sum_{l=1}^{l=k} \frac{\partial \psi_l}{\partial z_k}(0, z) \frac{\partial}{\partial z_l} \end{array} \right. \quad (1.31)$$

1) Le calcul de U_i donne :

$$\begin{aligned}
U_i &= \lim_{r_i \rightarrow 0} \frac{1}{r_i} \left\{ \Psi \left(r * x, y, z, f(r * x, y) \cdot f(x^{-1}, y) \right) - \Psi \left(x, y, z, f(x, y) \cdot f(x^{-1}, y) \right) \right\} \\
&= \lim_{r_i \rightarrow 0} \frac{1}{r_i} \left\{ \Psi \left(r * x, y, z, f(r * x, y) \cdot (f(x, y))^{-1} \right) \right. \\
&\quad \left. - \Psi \left(x, y, z, f(r * x, y) \cdot (f(x, y))^{-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \Psi \left(x, y, z, f(r * x, y) \cdot (f(x, y))^{-1} \right) \right. \\
&\quad \left. - \Psi \left(x, y, z, f(x, y) \cdot (f(x, y))^{-1} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Par dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}
U_i &= \sum_{l=1}^{l=m} \frac{\partial \Psi}{\partial x_l}(x, y, z) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}(0, x) \\
&+ \sum_{\beta=1}^{\beta=\dim Z(K)} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_i}(0, x) \frac{\partial f_\beta}{\partial x_\gamma}(x, y) \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z_\beta}(0, z) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z_\alpha}(x, y, z).
\end{aligned}$$

U_i s'écrit en utilisant les champs de vecteurs X_i , Z_k :

$$U_i = X_i + \sum_{\beta=1}^{\beta=\dim Z(K)} X_i(f_\beta) \cdot Z_\beta. \quad (1.32)$$

2) Un calcul analogue pour V_j montre que :

$$V_j = Y_j - \sum_{\beta=1}^{\beta=\dim Z(K)} Y_j(f_\beta) \cdot Z_\beta. \quad (1.33)$$

3) Et pour W_k on a :

$$W_k = Z_k \quad (1.34)$$

Les champs de vecteurs U_i , V_j , W_k sont tangents à $\mathbf{H}_{(G,L,K)}^f$, et invariants

à gauche . Remarquons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} [U_i, U_l] = [X_i, X_l] + \sum_{\beta=1}^{\beta=\dim Z(\mathcal{K})} [X_i, X_l](f_\beta).Z_\beta \\ [V_j, V_p] = [Y_j, Y_p] - \sum_{\beta=1}^{\beta=\dim Z(\mathcal{K})} [Y_j, Y_p](f_\beta).Z_\beta \\ [U_i, V_j] = - \sum_{\beta=1}^{\beta=\dim Z(\mathcal{K})} (X_i o Y_j + Y_j o X_i)(f_\beta).Z_\beta \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Les équation (1.32) , (1.33) , (1.34) , (1.35) et la définition de F montrent que les champs U_i, V_j, W_k engendrent l'algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F$. En effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} [U_i, U_l] = [X_i, X_l] + \sum_{\beta=1}^{\beta=\dim Z(\mathcal{K})} [X_i, X_l](f_\beta).Z_\beta \\ [V_j, V_p] = [Y_j, Y_p] - \sum_{\beta=1}^{\beta=\dim Z(\mathcal{K})} [Y_j, Y_p](f_\beta).Z_\beta \\ [W_k, W'_q] = [Z_k, Z'_q]_{\mathcal{K}} \\ [U_i, W_k] = 0 \\ [V_j, W_k] = 0 \\ [U_i, V_j] = F(X, Y). \end{array} \right.$$

ce qui termine la démonstration .

Corollaire 1.2.2 .

Soit $H_{(G,L,K)}^f$ le groupe de Heisenberg associé au triplet de groupes de Lie : G , L , K par le bi-homomorphisme f . Alors :

- 1) $H_{(G,L,K)}^f$ est nilpotent si et seulement si les trois groupes G , L , K sont nilpotents .
- 2) $H_{(G,L,K)}^f$ est résoluble si et seulement si les trois groupes G , L , K sont résolubles .

Preuve 1.2.6 .

Il suffit d'appliquer la proposition (1.2.5) , et le corollaire (1.2.1) .

Exemple 1.2.3 (Algèbres de Heisenberg réelles de dimension 4).

1) L'Algèbre de Lie du groupe de Heisenberg $H_{(2,1,1)}$ est l'Algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ engendrée par les champs de vecteurs :

$$\begin{cases} e_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{z}{2} \frac{\partial}{\partial t} \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{z}{2} \frac{\partial}{\partial t} \\ e_3 &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x+y}{2} \frac{\partial}{\partial t} \\ e_4 &= \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

On a :

$$[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = e_4, \text{ les autres crochets } = 0.$$

2) L'Algèbre de Lie du groupe de Heisenberg $H_{(1,1,2)}$ est l'Algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$ engendrée par les champs de vecteurs :

$$\begin{cases} e_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial t} \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial t} \\ e_3 &= \frac{\partial}{\partial z} \\ e_4 &= \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

On a :

$$[e_1, e_2] = e_3 + e_4, \text{ les autres crochets } = 0.$$

Proposition 1.2.6 .

Il existe à isomorphisme près deux et seulement deux Algèbres de Heisenberg réelles non Abéliennes de dimension 4 .

Preuve 1.2.7 .

Soit $\mathcal{H}$ une Algèbre de Heisenberg de dimension 4 . Alors $\mathcal{H}$ s'écrit :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{K})}^F.$$

avec :

ou

$$\mathcal{G} = R^2, \quad \mathcal{L} = R, \quad \mathcal{K} = R$$

ou

$$\mathcal{G} = R, \quad \mathcal{L} = R, \quad \mathcal{K} = R^2$$

ou

$$\mathcal{G} = R, \quad \mathcal{L} = R^2, \quad \mathcal{K} = R$$

Pour des raisons de dimension , les Algèbres de Lie $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ sont Abeliennes. Le premier et le troisieme cas sont isomorphes .

Premier cas : $\mathcal{G} = R^2$, $\mathcal{L} = R$, $\mathcal{K} = R$ et les applications bilinéaires de $R^2 \times R$ dans R sont :

$$\left((x, y), z \right) \longrightarrow f\left((x, y), z \right) = axz + byz$$

et donc les crochets de cette Algèbre sont :

$$[e_1, e_3] = 2a.e_4 \quad , \quad [e_2, e_3] = 2b.e_4$$

Deuxieme cas : $\mathcal{G} = R$, $\mathcal{L} = R$, $\mathcal{K} = R^2$ et toute application bilinéaire de $R \times R$ dans R^2 est de la forme :

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha.xz \\ \beta.yz \end{pmatrix}$$

et donc les crochets de cette Algèbre sont :

$$[e_1, e_2] = 2\alpha.e_3 + 2\beta.e_4$$

On est dans l'une des situations suivantes :

$$a, b \neq 0 \quad \text{alors} \quad \mathcal{H} \approx \mathcal{H}_{(2,1,1)}$$

$$a \neq 0, b = 0 \quad \text{alors} \quad \mathcal{H} \approx \mathcal{H}_{(1,1,2)}$$

$$\alpha, \beta \neq 0 \quad \text{alors} \quad \mathcal{H} \approx \mathcal{H}_{(1,1,2)}$$

$$\alpha \neq 0, \beta = 0 \quad \text{alors} \quad \mathcal{H} \approx \mathcal{H}_{(2,1,1)}$$

Et donc toute Algèbre de Heisenberg réelle non Abélienne de dimension 4 est isomorphe à $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ ou à $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$.

Corollaire 1.2.3 .

Il existe à isomorphisme près deux et seulement deux groupes de Heisenberg réels de dimension quatre non Abéliens et simplement connexes .

Preuve 1.2.8 .

On utilise le fait que deux groupes de Lie sont isomorphes si et seulement si leurs Algèbres de Lie sont isomorphes.

Chapitre 2

Métriques invariantes à gauche sur $H^f_{(G,L,K)}$

2.1 Caractérisation des métriques invariantes à gauche sur un groupe de Lie .

Dans la première section de ce chapitre on caractérise les métriques invariantes à gauche sur un groupe de Lie G , et dans la deuxième, on donne sur les groupes $H_{(2,1,1)}$, $H_{(1,1,2)}$ une classification à automorphisme d'Algèbre de Lie près des métriques riemanniennes invariantes à gauche et selon la signature des métriques pseudo-riemanniennes invariantes à gauche. Ces deux dernières classifications sont les analogues en dimension quatre d'un résultat de classification des métriques Lorentziennes sur H_3 dû à S.Rahmani [19].

Définition 2.1.1 .

Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique non dégénérée g . On dit que la métrique g est invariante à gauche sur le groupe G si et seulement si :

$$\forall s \in G : \quad g_{\tau_s(x)} = g_x. \quad (2.1)$$

Remarque 2.1.1 .

Si la métrique g est riemannienne, le groupe (G, g) est dit riemannien ⁽¹⁾. Si la métrique g est pseudo-riemannienne, le groupe de Lie (G, g) est dit pseudo-riemannien.

1. Dans le cas complexe, on peut définir d'une manière analogue les groupes de Lie Hermitiens.

2.2.1- Construction de métriques invariantes à gauche.

Soit G un groupe de Lie , $\mathbf{L} = T_e G$ son Algèbre de Lie .

Nous allons voir qu'à toute forme quadratique Q sur $\mathbf{L} = T_e G$

$$Q(X) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} a_{i,j} X_i X_j$$

est associée sur le groupe G une métrique g invariante à gauche .

Cette métrique est riemannienne si la forme quadratique Q est définie positive et pseudo-riemannienne si la forme quadratique est semi-définie.

Plus précisément , nous avons la proposition :

Proposition 2.1.1 .

Soient G un groupe de Lie , et :

$$Q(X) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} a_{i,j} X_i X_j \quad (2.2)$$

une forme quadratique sur $\mathbf{L} = T_e G$.

Si : $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ désigne la forme de Maurer-Cartan du groupe G , Alors la métrique g définie en tout point $x \in G$ par :

$$g_x = Q(\omega_x) \quad (2.3)$$

est invariante à gauche .

Preuve 2.1.1 .

On sait d'après le théorème (1.1.1) que la forme de Maurer-Cartan ω est invariante à gauche sur G , les coefficients de la forme quadratique Q étant constants , la métrique g est donc invariante à gauche .

Remarque 2.1.2 .

La métrique g définie dans la proposition(2.1.1) :

$$g_x = Q(\omega_x) \quad (2.4)$$

g_x est la composition de deux applications Q et ω suivant le schéma :

$$\begin{array}{ccc} T_x G & \xrightarrow{\omega_x} & T_e G \\ & \searrow g_x & \downarrow Q \\ & & R \end{array} \quad (2.5)$$

Exemple 2.1.1 .

Connaissant la forme de Maurer-Cartan du groupe de Heisenberg H_3 , on peut construire avec les trois formes quadratiques suivantes de R^3 :

$$\begin{cases} Q_1(X) &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \\ Q_2(X) &= X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 \\ Q_3(X) &= X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

trois métriques invariantes à gauche sur H_3 . Ce sont les métriques :

$$\begin{cases} g_1 &= dx_1^2 + dx_2^2 + (dx_3 + \frac{1}{2}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2))^2 \\ g_2 &= dx_1^2 + dx_2^2 - (dx_3 + \frac{1}{2}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2))^2 \\ g_3 &= dx_1^2 - dx_2^2 + (dx_3 + \frac{1}{2}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2))^2 \end{cases} \quad (2.7)$$

la première est riemannienne , les deux autres pseudo-riemanniennes .

Exemple 2.1.2 .

La métrique définie sur $H_{(2,1,1)}$ par :

$$ds^2 = dx_2^2 + dy^2 + dz^2 + (dt + \frac{1}{2}(z dx - x dz) + \frac{1}{2}(z dy - y dz))^2.$$

est une métrique riemannienne invariante à gauche.

Exemple 2.1.3 .

Sur $H_{(1,1,2)}$ les métriques :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz + \frac{1}{2}(y dx - x dy))^2 + (dt + \frac{1}{2}(y dx - x dy))^2$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz + \frac{1}{2}(y dx - x dy))^2 - (dt + \frac{1}{2}(y dx - x dy))^2$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - (dz + \frac{1}{2}(y dx - x dy))^2 - (dt + \frac{1}{2}(y dx - x dy))^2$$

sont invariantes à gauche . La première est riemannienne , la seconde et la troisième sont pseudo-riemanniennes.

2.2.2- Caractérisation des métriques invariantes à gauche :**Proposition 2.1.2 .**

Soit ω la forme de Maurer-Cartan du groupe G . Si g est une métrique invariante à gauche sur le groupe G , il existe alors sur l'Algèbre de Lie $T_e G$ une forme quadratique Q et une seule telle que :

$$g_x = Q(\omega_x).$$

Preuve 2.1.2 .

Soit g une métrique de G .

Dans un système de coordonnées locales au voisinage du point x , g s'écrit :

$$g_x = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} g_{ij}(x) dx_i dx_j \quad (2.8)$$

Soit τ_s une translation à gauche de G , posons $\tau_s(x) = \varphi(s, x)$.

On a :

$$g_{\tau_s(x)} = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} g_{ij}(\varphi(s, x)) d_x \varphi_i(x, s) d_x \varphi_j(x, s) \quad (2.9)$$

Étant donné que g est invariante par la translation à gauche τ_s , alors :

$$g_{\tau_s(x)} = g_x$$

D'où :

$$g_x = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} g_{ij}(\varphi(s, x)) d_x \varphi_i(x, s) d_x \varphi_j(x, s) \quad (2.10)$$

Le calcul des différentielles $d_x \varphi_i(x, s)$ et $d_x \varphi_j(x, s)$ nous permet d'obtenir :

$$g_x = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} \sum_{k,l=1}^{k,l=n} g_{ij}(\varphi(s, x)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(s, x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(s, x) dx_k dx_l \quad (2.11)$$

Pour la valeur $s = x^{-1}$, et observe que :

$$\begin{cases} v_{ik}(x) &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x^{-1}, x) \\ v_{jl}(x) &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}(x^{-1}, x) \end{cases} \quad (2.12)$$

et que :

$$g_{ij}(\varphi(x^{-1}, x)) = g_{ij}(e) \quad (2.13)$$

Reportons (2.12) et (2.13) dans (2.11) , on obtient alors :

$$g_x = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} g_{ij}(e) \left(\sum_{k=1}^{k=n} v_{ik}(x) dx_k \right) \left(\sum_{l=1}^{l=n} v_{jl}(x) dx_l \right) \quad (2.14)$$

c'est à dire que :

$$g_x = \sum_{i,j} g_{ij}(e) \omega_i(x) \omega_j(x) \quad (2.15)$$

ce qui signifie tout simplement que

$$g_x = Q(\omega_x) \quad (2.16)$$

avec :

$$Q(X) = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} g_{ij}(e) X_i X_j$$

Q est la forme quadratique définie sur l'Algèbre de Lie $\mathbf{L} = T_e G$ demandée.

2.2 Classification des métriques invariantes à gauche sur $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$

Notations :

Sur l'espace numérique réel R^n , on note par Q_n^+ la forme quadratique définie positive réduite :

$$\forall X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in R^n : \quad Q_n^+(X) = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2. \quad (2.17)$$

et pour un vecteur $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^n$, où $\varepsilon_j = \pm 1$, on note par Q_n^ε , la forme quadratique non dégénérée réduite :

$$\forall X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in R^n : \quad Q_n^\varepsilon(X) = \varepsilon_1 \cdot X_1^2 + \varepsilon_2 \cdot X_2^2 + \dots + \varepsilon_n \cdot X_n^2. \quad (2.18)$$

Les classifications qui vont suivre reposent sur le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 (*Gauss*).

Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur R^n . Il existe une matrice diagonale λ positive, et une matrice nilpotente N , telles que :

$$\forall X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in R^n : \quad Q(X) = Q_n^\varepsilon \left((\lambda + N)(X) \right). \quad (2.19)$$

Preuve 2.2.1 .

La preuve se fait par triangularisation de la matrice de la forme quadratique Q .

**2.2.2-A) Classification des métriques riemanniennes
invariantes à gauche sur $H_{(2,1,1)}$.**
Proposition 2.2.1 .

Sur l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$, toute forme quadratique non dégénérée est équivalente à automorphisme près à l'une des formes quadratiques :

$$P(X, Y, Z, T) = a\varepsilon_1 X^2 + b\varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 (Z - X)^2 + c\varepsilon_4 T^2.$$

$$Q(X, Y, Z, T) = a\varepsilon_1 X^2 + b\varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 Z^2 + \varepsilon_4 T^2.$$

$$R(X, Y, Z, T) = aX^2 - a(Y + X)^2 + \varepsilon_3 Z^2 + \varepsilon_4 T^2.$$

avec $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $\varepsilon_j = \pm 1$.

Preuve 2.2.2 .

Soit Q_1 une forme quadratique non dégénérée sur l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$:

$$Q_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{i,j=1}^{i,j=4} a_{i,j} X_i X_j$$

Posons :

$$X = X_1 \quad , \quad Y = X_2 \quad , \quad Z = X_3 \quad , \quad T = X_4.$$

Q_1 s'écrit d'après le lemme (2.2.1) sous la forme :

$$Q_1(X, Y, Z, T) = a'\varepsilon_1 X^2 + b'\varepsilon_2 (Y + \alpha' X)^2 + c\varepsilon_3 (Z + \beta' X + \gamma' Y)^2 + d\varepsilon_4 (T + \delta X + \tau Y + \sigma Z)^2$$

avec $a' > 0$, $b' > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

La transformation :

$$\Psi_1 : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T + \delta X + \tau Y + \sigma Z \end{pmatrix}$$

est un automorphisme de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ qui réduit la forme quadratique Q_1 à la forme :

$$Q_2(X, Y, Z, T) = a'\varepsilon_1 X^2 + b'\varepsilon_2 (Y + \alpha' X)^2 + c\varepsilon_3 (Z + \beta' X + \gamma' Y)^2 + d\varepsilon_4 T^2$$

et l'automorphisme :

$$\Psi_2 : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}X \\ \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}Y \\ \sqrt{c}Z \\ \sqrt{d}T \end{pmatrix}$$

nous permet de normaliser Q_2 sous la forme :

$$Q_3(X, Y, Z, T) = a\varepsilon_1 X^2 + b\varepsilon_2 (Y + \alpha X)^2 + \varepsilon_3 (Z + \beta X + \gamma Y)^2 + \varepsilon_4 T^2 \quad (2.20)$$

avec :

$$a = a' \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}, \quad b = b' \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}, \quad \alpha = \alpha' \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}, \quad \beta = \beta' \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}, \quad \gamma = \gamma' \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$$

Discutons les cas suivants :

1^{er} cas : $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Si $\alpha \neq +1$, on peut poser $\alpha = \frac{\sigma}{1+\sigma}$ et l'automorphisme de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ défini par :

$$\Psi_3 : \mathcal{H}_{(2,1,1)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(2,1,1)}.$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y + \frac{\frac{X}{1+\sigma}}{\frac{\sigma X}{1+\sigma}} \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

réduit Q_3 à la forme $Q(X, Y, Z, T)$ de la proposition .

Si $\alpha = +1$, et $a\varepsilon_1 \neq -b\varepsilon_2$, alors quitte à permuter X et Y on se ramène au cas $\alpha \neq +1$.

Si $\alpha = +1$ et $a\varepsilon_1 = -b\varepsilon_2$, la forme Q_3 est de la forme $R(X, Y, Z, T)$ de la proposition .

2^{ieme} cas : $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$.

L'application :

$$\Psi_4 : \mathcal{H}_{(2,1,1)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(2,1,1)}.$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z + \gamma X + \gamma Y \\ T \end{pmatrix}$$

est un automorphisme de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ qui réduit la forme quadratique (2.20) à la forme :

$$Q_4(X, Y, Z, T) = a\varepsilon_1 X^2 + b\varepsilon_2 (Y + \alpha X)^2 + \varepsilon_3 (Z + \beta X)^2 + \varepsilon_4 T^2.$$

Si $\alpha = 1$: La transformation :

$$\Psi_5 : \mathcal{H}_{(2,1,1)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(2,1,1)}.$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\beta X \\ Z + \beta X \\ Y + X \\ -T \end{pmatrix}$$

est un automorphisme d'Algèbre de Lie réduit $Q_4(X, Y, Z, T)$ à la forme :

$$Q_5(X, Y, Z, T) = a\varepsilon_1 X^2 + b\varepsilon_2 Z^2 + \varepsilon_3 Y^2 + \varepsilon_4 T^2.$$

et en renormalisant les coefficients , la proposition est donc démontrée .

Pour $\alpha = -1$,remarquons que : $Y - X = Y + X - 2X$.

Ψ_4 réduit $Q_4(X, Y, Z, T)$ à la forme :

$$Q_6(X, Y, Z, T) = a\varepsilon_1 X^2 + b\varepsilon_2 (Z - 2X)^2 + \varepsilon_3 Y^2 + \varepsilon_4 T^2.$$

Posons : $X' = 2X$, $Y' = 2Y$, $Z' = Z$, $T' = 2T$. C'est un automorphisme qui réduit $Q_6(X, Y, Z, T)$ à la forme :

$$Q_7(X, Y, Z, T) = \frac{a}{4}\varepsilon_1 X^2 + b\varepsilon_2 (Z - X)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_3 Y^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_4 T^2.$$

L'automorphisme : $X' = \sqrt{b}X$, $Y' = \sqrt{b}Y$, $Z' = \sqrt{b}Z$, $T' = \frac{1}{\sqrt{b}}T$ réduit $Q_7(X, Y, Z, T)$ à la forme $P(X, Y, Z, T)$. et la proposition est démontré .

Si $\alpha \neq \pm 1$, posons $\alpha = \frac{\sigma}{1+\sigma}$.

En appliquant l'automorphisme Ψ_3 , on se ramène d'abord à la forme :

$$Q_8(X, Y, Z, T) = a\varepsilon_1 X^2 + b\varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 (Z + \beta X)^2 + \varepsilon_4 T^2.$$

et ensuite un autre automorphisme

$$\Psi_6 : \mathcal{H}_{(2,1,1)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(2,1,1)}.$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{X}{2} \\ Y + \frac{X}{2} \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

réduit $Q_8(X, Y, Z, T)$ à la forme quadratique :

$$Q_9(X, Y, Z, T) = a\varepsilon_1 X^2 + b\varepsilon_2 (Y - X)^2 + \varepsilon_3 (Z + \beta X)^2 + \varepsilon_4 T^2.$$

qui est du type $Q_4(X, Y, Z, T)$ avec $\alpha = -1$, et ce cas a déjà été discuté .

La proposition est donc démontrée .

Proposition 2.2.2 .

Sur l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$, toute forme quadratique définie positive est équivalente à automorphisme près à l'une des deux formes quadratiques :

$$Q(X, Y, Z, T) = aX^2 + bY^2 + Z^2 + T^2.$$

$$P(X, Y, Z, T) = aX^2 + bY^2 + (Z - X)^2 + cT^2.$$

avec $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

C'est un corollaire de la proposition précédente.

Théorème 2.2.1 .

Toute métrique riemannienne invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg $H_{(2,1,1)}$ est équivalente à automorphisme de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ près , à l'une des deux métriques :

$$g_1 = adx^2 + bdy^2 + dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(ydz - zdy) \right)^2$$

$$g_2 = adx^2 + bdy^2 + (dz - dx)^2 + c \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(ydz - zdy) \right)^2$$

où les reels a, b, c sont > 0 .

Preuve 2.2.3 .

L'Algèbre $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ est l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg $H_{(2,1,1)}$. Ses crochets sont définis dans une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ par :

$$[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = e_4 \quad \text{les autres crochets sont nuls .}$$

Soit g une métrique invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg $H_{(2,1,1)}$, elle est définie d'après la proposition (2.1.2) par une forme quadratique $Q(X, Y, Z, T)$ définie positive sur $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$.

$$g = Q(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$$

où :

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix}$$

est la forme de Maurer-Cartan du groupe de Lie $H_{(2,1,1)}$.

La réduction de la métrique g est ramenée à la réduction de la forme quadratique $Q(X, Y, Z, T)$.

Du momoent que la forme quadratique Q est définie positive , elle est équivalente d'après la proposition (2.2.1) à l'une des deux formes :

$$Q(X, Y, Z, T) = aX^2 + bY^2 + Z^2 + T^2.$$

$$P(X, Y, Z, T) = aX^2 + bY^2 + (Z - X)^2 + cT^2.$$

avec $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

et par dualité , la métrique g est équivalente à l'une des deux métriques :

$$= a\omega_1^2 + b\omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2.$$

$$g_2 = a\omega_1^2 + b\omega_2^2 + (\omega_3 - \omega_1)^2 + c\omega_4^2.$$

avec $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Le théorème est donc démontré.

2.2.2-B) Classification des métriques pseudo-riemanniennes invariantes à gauche sur le groupe $H_{(2,1,1)}$.

Proposition 2.2.3 .

Sur l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$, toute forme quadratique de signature $(3,1)$ est isomorphe à l'une des formes quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} Q_1(X, Y, Z, T) &= -a^2.X^2 + b^2.Y^2 + Z^2 + T^2. \\ Q_2(X, Y, Z, T) &= a^2.X^2 + b^2.Y^2 - Z^2 + T^2. \\ Q_3(X, Y, Z, T) &= a^2.X^2 + b^2.Y^2 + Z^2 - T^2. \\ Q_4(X, Y, Z, T) &= a^2.X^2 + b^2.Y^2 - (Z - X)^2 + c^2T^2 \\ Q_5(X, Y, Z, T) &= a^2.X^2 + b^2.Y^2 + (Z - X)^2 - c^2T^2 \\ Q_6(X, Y, Z, T) &= a^2.X^2 - a^2.(Y + X)^2 + Z^2 + T^2. \end{aligned}$$

où a et b et c sont deux nombres reels $\neq 0$.

C'est un corollaire de la proposition 2.2.1.

Théorème 2.2.2 .

Toute métrique pseudo-riemannienne de signature $(3, 1)$ invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg $H_{(2,1,1)}$ est équivalente à automorphisme

de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ près à l'une des métriques suivantes :

$$\begin{aligned}
g_1 &= -a^2 dx^2 + b^2 (dy)^2 + dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_2 &= a^2 dx^2 + b^2 (dy)^2 - dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_3 &= a^2 dx^2 + b^2 (dy)^2 + dz^2 - \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_4 &= a^2 dx^2 + b^2 dy^2 - (dz - dx)^2 + c^2 \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_5 &= a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + (dz - dx)^2 - c^2 \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_6 &= a^2 dx^2 - a^2 (dy + dx)^2 + dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2
\end{aligned}$$

avec $a, b, c \neq 0$.

Preuve 2.2.4 .

C'est un corollaire de la proposition (2.2.3) précédente .

Proposition 2.2.4 .

Sur l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$, toute forme quadratique de signature $(2,2)$ est isomorphe à l'une des formes quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned}
Q_1(X, Y, Z, T) &= -a^2.X^2 - b^2.Y^2 + Z^2 + T^2. \\
Q_2(X, Y, Z, T) &= a^2.X^2 + b^2.Y^2 - Z^2 - T^2. \\
Q_3(X, Y, Z, T) &= -a^2.X^2 + b^2.Y^2 - Z^2 + T^2. \\
Q_4(X, Y, Z, T) &= -a^2.X^2 + b^2.Y^2 + Z^2 - T^2. \\
Q_5(X, Y, Z, T) &= -a^2.X^2 - b^2.Y^2 + (Z - X)^2 + c^2T^2 \\
Q_6(X, Y, Z, T) &= -a^2.X^2 + b^2.Y^2 + (Z - X)^2 - c^2T^2 \\
Q_7(X, Y, Z, T) &= -a^2.X^2 + a^2.(Y + X)^2 - Z^2 - c^2T^2 \\
Q_8(X, Y, Z, T) &= -a^2.X^2 + a^2.(Y + X)^2 + Z^2 - c^2T^2.
\end{aligned}$$

où a et b et c sont deux nombres reels $\neq 0$.

C'est un corollaire de la proposition 2.2.1.

Théorème 2.2.3 .

Toute métrique pseudo-riemannienne de signature $(2, 2)$ invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg $H_{(2,1,1)}$ est équivalente à automorphisme

de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ près à l'une des métriques suivantes :

$$\begin{aligned}
g_1 &= -a^2 dx^2 - b^2 (dy)^2 + dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_2 &= -a^2 dx^2 + b^2 (dy)^2 - dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_3 &= -a^2 dx^2 + b^2 (dy)^2 + dz^2 - \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_4 &= a^2 dx^2 + b^2 (dy)^2 - dz^2 - \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_5 &= -a^2 dx^2 - b^2 dy^2 + (dz - dx)^2 + c^2 \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_6 &= -a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + (dz - dx)^2 - c^2 \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_7 &= -a^2 dx^2 + a^2 (dy + dx)^2 + dz^2 - \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2 \\
g_8 &= -a^2 dx^2 + a^2 (dy + dx)^2 + dz^2 - \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2
\end{aligned}$$

avec $a, b, c \neq 0$.

C'est un corollaire de la proposition (2.2.4).

2.2.2-C) Classification des métriques riemanniennes invariantes à gauche sur le groupe $H_{(1,1,2)}$.

Proposition 2.2.5 .

Sur l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$, toute forme quadratique non dégénérée est équivalente à automorphisme près à la forme :

$$Q(X, Y, Z, T) = \varepsilon_1 a X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 c Z^2 + \varepsilon_4 T^2.$$

avec $a > 0, c > 0$ et $\varepsilon_j = \pm 1$.

Preuve 2.2.5 .

Soit Q_1 une forme quadratique non dégénérée sur l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$:

$$Q_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{i,j=1}^{i,j=4} a_{i,j} X_i X_j$$

Posons :

$$X = X_1, \quad Y = X_2, \quad Z = X_3, \quad T = X_4.$$

Q_1 s'écrit d'après le lemme (2.2.1) sous la forme :

$$Q_1(X, Y, Z, T) = \varepsilon_1 a' X^2 + \varepsilon_2 b' (Y + \alpha' X)^2 + \varepsilon_3 c' (Z + \beta' X + \gamma' Y)^2 + \varepsilon_4 d (T + \delta X + \tau Y + \sigma Z)^2$$

avec $a' > 0$, $b' > 0$, $c' > 0$, $d > 0$.

Si $\sigma \neq 1$ La transformation :

$$\varphi_1 : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y + \alpha' X \\ Z + \beta' X + \gamma' Y \\ (1 - \sigma)T + \delta X + \tau Y + \sigma Z \end{pmatrix}$$

est un automorphisme de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$ qui réduit la forme quadratique Q_1 à la forme :

$$Q_2(X, Y, Z, T) = \varepsilon_1 a' X^2 + \varepsilon_2 b' Y^2 + \varepsilon_3 c Z^2 + \varepsilon_4 d T^2$$

et l'automorphisme :

$$\varphi_2 : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{b'}} X \\ \sqrt{b'} Y \\ \sqrt{d} Z \\ \sqrt{d} T \end{pmatrix}$$

normalise Q_2 sous la forme :

$$Q_3(X, Y, Z, T) = \varepsilon_1 a X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 c' Z^2 + \varepsilon_4 T^2$$

avec :

$$a = a' \frac{b'}{d} , \quad c = \frac{c'}{d}, \quad \alpha = \frac{\alpha'}{\sqrt{d}}$$

On prend :

$$Q(X, Y, Z, T) = Q_3(X, Y, Z, T)$$

Si $\sigma = 1$, on applique l'automorphisme :

$X' = 2X$, $Y' = Y$, $Z' = 2Z$, $T' = T$ et par normalisation par Ψ_2 , on trouve la forme $Q(X, Y, Z, T)$ de la proposition

Théorème 2.2.4 .

Toute métrique riemannienne invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg $H_{(1,1,2)}$ est équivalente à automorphisme de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$ près , à la métrique :

$$g_1 = \lambda dx^2 + dy^2 + \mu \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2$$

où les reals λ, μ sont > 0 .

Preuve 2.2.6 .

Rappelons que l'Algèbre $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$ est l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg $H_{(1,1,2)}$. Ses crochets sont définis dans une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ par :

$$[e_1, e_2] = e_3 + e_4 \quad \text{les autres crochets sont nuls .}$$

Soit g une métrique invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg $H_{(1,1,2)}$, elle est définie d'après la proposition (2.1.2) par une forme quadratique $Q(X, Y, Z, T)$ définie positive sur $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$.

$$g = Q_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$$

où :

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix}$$

est la forme de Maurer-Cartan du groupe de Lie $H_{(1,1,2)}$. Le problème revient à réduire la forme Q_1 .

Par la proposition (2.2.4) la forme quadratique Q_1 se réduit à la forme :

$$Q(X, Y, Z, T) = aX^2 + Y^2 + cZ^2 + T^2.$$

avec $a > 0$, $c > 0$.

et donc le théorème est démontré .

2.2.2-D) Classification des métriques pseudo-riemanniennes invariantes à gauche sur le groupe $H_{(1,1,2)}$.

Proposition 2.2.6 .

Sur l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$ toute forme quadratique de signature (3,1) est équivalente à automorphisme près à l'une des formes :

$$\begin{aligned} Q_1 &= -aX_2 + Y^2 + cZ^2 + T^2 \\ Q_2 &= aX_2 + Y^2 + -cZ^2 + T^2 \end{aligned}$$

avec $a > 0$ et $c > 0$.

Preuve 2.2.7 .

C'est une conséquence immédiate de la proposition (2.2.5) .

Théorème 2.2.5 .

Sur le groupe de Heisenberg $H_{(1,1,2)}$ toute métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche de signature $(3,1)$ est équivalente à automorphisme d'Algèbre de Lie près à l'une des métriques :

$$\begin{aligned} g_1 &= -adx^2 + dy^2 + c \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 \\ g_2 &= adx^2 + dy^2 - c \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 \end{aligned}$$

avec $a > 0$ et $c > 0$.

Preuve 2.2.8 .

C'est un corollaire de la proposition (2.2.6) .

Proposition 2.2.7 .

Sur l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$ toute forme quadratique de signature $(2,2)$ est équivalente à automorphisme près à l'une des formes :

$$\begin{aligned} Q_1 &= -aX^2 - Y^2 + cZ^2 + T^2 \\ Q_2 &= aX^2 + Y^2 - cZ^2 - T^2 \\ Q_3 &= -aX^2 + Y^2 - cZ^2 + T^2 \end{aligned}$$

avec $a > 0$ et $c > 0$.

Preuve 2.2.9 .

C'est un corollaire de la proposition (2.2.5) .

Théorème 2.2.6 .

Sur le groupe de Heisenberg $H_{(1,1,2)}$ toute métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche de signature $(2, 2)$ est équivalente à automorphisme d'Algèbre de Lie près à l'une des métriques :

$$\begin{aligned} g_1 &= -adx^2 + dy^2 - c \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 \\ g_2 &= adx^2 + dy^2 - c \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 - \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 \\ g_3 &= -adx^2 - dy^2 + c \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 \end{aligned}$$

avec $a > 0$ et $c > 0$.

Preuve 2.2.10 .

C'est un corollaire de la proposition (2.2.7) .

Chapitre 3

Le groupe des isométries d'une métrique invariante à gauche

Dans ce chapitre , on se propose d'appliquer les résultats sur le groupe des isométries d'un groupe de Lie G nilpotent simplement connexe , muni d'une métrique g riemannienne invariante à gauche , et d'un groupe de Lie pseudo-riemannien nilpotent simplement connexe d'indice de nilpotence $= 2$ dont le centre ne contient aucun vecteur isotrope. Il s'avère que dans les deux cas cités une isométrie de g laissant invariant l'élément neutre est un automorphisme du groupe .

Les deux résultats sont connus . Voir [21] pour le cas d'un groupe de Lie nilpotent muni d'une métrique riemannienne .

On donne dans le cas où le centre ne contient pas de vecteurs non dégénérés des applications aux groupes de Heisenberg de dimension quatre munis de métriques pseudo-riemanniennes .

3.1 Les isométries d'une métrique invariante à gauche sur un groupe de Lie .

Définition 3.1.1 .

Soient G un groupe de Lie , g une métrique invariante à gauche sur G . Une application différentiable Ψ de G dans G est une isométrie de (G, g) si et seulement si :

$$\forall x \in G \quad g_{\Psi(x)} = g_x. \quad (3.1)$$

Remarque 3.1.1 .

Si la métrique invariante à gauche g est définie par une forme quadratique Q

sur $T_e G$, alors la condition (3.1) s'exprime de la manière suivante :

$$\forall x \in G \quad Q(\omega_{\Psi(x)}) = Q(\omega_x).$$

On étudie le groupe des isométries de la métrique g . Commençons par observer que les isométries qui conservent l'élément neutre du groupe G déterminent toutes les autres à translation près .

En effet , On a la proposition :

Proposition 3.1.1 .

φ est une isométrie de g si et seulement s'il existe un élément b de G , et une isométrie Ψ de g conservant l'élément neutre e telle que :

$$\varphi = \tau_b \circ \Psi.$$

Le couple (τ_b, Ψ) est unique .

Preuve 3.1.1 .

Du moment que g est invariante à gauche , alors les translations à gauche de G sont des isométries de la métrique g . Posons :

$$b = \varphi(e) \quad \text{et} \quad \Psi = \tau_{b^{-1}} \circ \varphi.$$

Le couple (τ_b, Ψ) répond à la question .

La détermination des isométries Ψ de la métrique g qui conservent l'élément neutre e , dans le cas nilpotent repose sur les théorèmes réciproques suivants :

Théorème 3.1.1 .

Soient G un groupe de Lie , g une métrique invariante à gauche sur G définie par une forme quadratique Q sur $T_e G$. Si Ψ est une application de G telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \Psi \text{ est un automorphisme de } G . \\ 2) \quad D_e \Psi \text{ est une application orthogonale de } T_e G \text{ pour } Q . \end{array} \right. .$$

Alors Ψ est une isométrie de G .

Théorème réciproque (cas riemannien).

Théorème 3.1.2 (E.N.Wilson) .

Soient G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe , g une métrique riemannienne invariante à gauche sur G . Si Ψ est une isométrie de g qui laisse invariant l'élément neutre e de G , alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \Psi \text{ est un automorphisme de } G . \\ 2) \quad D_e \Psi \text{ est une application orthogonale de } T_e G \text{ pour } Q . \end{array} \right. .$$

Théorème réciproque (cas pseudo-riemannien).

Théorème 3.1.3 .

Soient G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe dont le centre ne contient aucun vecteur non dégénéré , g une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur G . Si Ψ est une isométrie de g qui laisse invariant l'élément neutre e de G , alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \Psi \text{ est un automorphisme de } G . \\ 2) \quad D_e \Psi \text{ est une application orthogonale de } T_e G \text{ pour } Q . \end{array} \right. .$$

on aura besoin des propositions suivantes :

Proposition 3.1.2 .

Soit l'application :

$$\begin{aligned} F : \text{Aut}(G) &\longrightarrow \text{Aut}(T_e G) \\ \Psi &\longrightarrow D_e \Psi \end{aligned}$$

Si G est connexe , F est injective .

Si G est connexe et simplement connexe , alors F est bijective .

Pour une démonstration voir [14]

Proposition 3.1.3 .

Soit E un R -espace vectoriel, Q une forme quadratique non dégénérée sur E . $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ une suite finie d'opérateurs de E telle que A_0 soit orthogonal pour Q . Supposons que $\forall t \in R$, l'opérateur :

$$B(t) = \sum_{j=0}^{j=m} t^j . A_j$$

est orthogonal pour Q .

1^{er} cas : Si Q est définie positive , alors $\forall 1 \leq j \leq m : A_j = 0$

2^{eme} cas : Si Q est semi-définie , et $\forall 1 \leq j \leq m : \text{Im}(A_j)$ ne contient de vecteurs isotropes, alors : $\forall 1 \leq j \leq m : A_j = 0$.

Preuve 3.1.2 *Supposons que : $\forall t \in R$,*

$$B(t) = \sum_{j=0}^{j=m} t^j . A_j$$

est orthogonal pour Q , cela signifie que :

$$\forall t \in R \quad B^*(t) . B(t) = Id$$

Or A_0 est orthogonal pour Q . On doit donc avoir :

$$A_m^* . A_m = 0$$

donc :

$$\forall x \in E : \quad Q(A_m(x)) = 0$$

Si Q est définie positive , alors $\forall x \in E \quad A_m(x) = 0$ d'où $A_m = 0$

Si Q est définie semi-définie , et du moment que $Im(A_m)$ ne contient pas de vecteurs isotropes , alors $\forall x \in E \quad A_m(x) = 0$ et on obtient $A_m = 0$.

Une fois que $A_m = 0$, on montre de la même façon que $\forall 1 \leq j \leq m : A_j = 0$

Preuve 3.1.3 (du théorème 3.1.1).

Soit Ψ un automorphisme du groupe G tel que $D_e \Psi$ soit une application orthogonale de $T_e G$. D'après la proposition (3.1.2) , la 1-forme différentielle $\omega_{\Psi(x)}$ est invariante à gauche sur G . Il existe (voir [14]) donc un automorphisme A de $T_e G$ tel que :

$$\omega_{\Psi(x)} = A . \omega_x \tag{3.2}$$

Dans un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage du point x exprimons ω_x par la matrice inversible :

$$V(x) = (v_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$$

On a alors

$$\omega_x = V(x) . dx$$

et

$$\omega_{\Psi(x)} = V(\Psi(x)) . \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} . dx$$

l'équation(3.2) s'écrit dans les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$:

$$V(\Psi(x)) . \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} . V^{-1}(x) = A$$

en prenant $x = e$ et sachant que $\Psi(e) = e$ et $V(e) = Id$, on obtient :

$$A = D_e \Psi$$

Donc A est orthogonale pour Q , ce qui implique d'après (3.2) que :

$$Q(\omega_{\Psi(x)}) = Q(\omega_x) .$$

autrement dit :

$$g_{\Psi(x)} = g_x .$$

Donc Ψ est une isométrie de G . La proposition est donc démontrée .

On se propose de donner une démonstration des théorèmes (3.1.2) et (3.1.3) pour les applications de la forme :

$$\Psi : G \longrightarrow G$$

$$X \longrightarrow \Psi(\exp(X)) = \exp(A_0(X))$$

où A_0 est une application lineaire de $T_e G$ dans $T_e G$

Preuve 3.1.4 .

Supposons que la métrique invariante à gauche g du groupe de Lie G soit définie par la forme quadratique Q sur l'Algèbre de Lie $T_e G$.

Considérons l'application $\exp$:

$$\exp : T_e G \longrightarrow G$$

$$X \longrightarrow x = \exp(X)$$

qui est un difféomorphisme car G est simplement connexe .

Soient $x = \exp(X)$ et $y = \exp(Y)$ deux éléments du groupe G .

La translation à gauche dans le groupe G :

$$\tau_x(y) = x.y$$

se traduit dans l'Algèbre de Lie $T_e G$ par la translation à gauche :

$$\tau_X(Y) = \varphi(X, Y)$$

où $\varphi(X, Y)$ est définie dans $T_e G$ par la formule de Campbell-Hausdorf :

$$\exp(X).\exp(Y) = \exp(\varphi(X, Y))$$

l'expression de $\varphi(X, Y)$ est donnée par :

$$\varphi(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \dots$$

$\varphi(X, Y)$ est en général une série qui se réduit dans le cas d'un groupe de Lie nilpotent à un polynome en X et Y .

La forme de Maurer-Cartan ω sur G :

$$\omega_x : T_x G \longrightarrow T_e G$$

$$h \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\tau_x(x^{-1}))(h)$$

se traduit dans l'Algèbre de Lie $T_e G$ par :

$$\begin{aligned}\omega_X : T_e G &\longrightarrow T_e G \\ h &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial Y}(\varphi(X, -X))(h)\end{aligned}$$

ou encore :

$$\omega_X : h \longrightarrow \omega_X(h) = h + \frac{1}{2}[X, h] + \dots$$

La métrique g étant invariante à gauche :

$$\forall x \in G : \omega_x \text{ est une isométrie pour } g$$

ce qui signifie que $\forall X \in T_e G$, ω_X est une isométrie pour la structure d'espace métrique transportée par $\exp^{-1}$.

Remarquons que $A_0 = D_e \Psi$. Si Ψ est une isométrie de g conservant l'élément neutre e , A_0 est alors une isométrie de $T_e G$ pour la structure d'espace métrique transportée par $\exp^{-1}$.

Considérons pour $t \in R$ et $X \in T_e G$ l'application :

$$\begin{aligned}L : T_e G &\longrightarrow T_e G \\ h &\longrightarrow L(h) = \omega_{-tA_0(X)} \left(A_0(\omega_{tX}(h)) \right)\end{aligned}$$

L'expression de $L(h)$ est :

$$L(h) = A_0(h) + \frac{1}{2}t \cdot \left(A_0([X, h]) - [A_0(X), A_0(h)] \right) - \frac{1}{4}t^2 [A_0(X), A_0([X, h])] + \dots$$

$L(h)$ est polynomiale en t , on peut l'écrire avec des opérateurs A_j dépendant de X :

$$L(h) = A_0(h) + \sum_{j=1}^{j=m} t^j \cdot A_j(h)$$

A_0 étant orthogonale pour Q , alors : $\forall t \in R$ et $\forall X \in T_e G$ L est orthogonale pour la forme quadratique Q (c'est une composition d'isométries). Appliquons la proposition (3.1.3) : Si la métrique g est riemannienne, alors la forme quadratique Q est définie positive, donc $\forall 1 \leq j \leq m : A_j = 0$. Or :

$$A_1(h) = A_0([X, h]) - [A_0(X), A_0(h)] = 0$$

ceci signifie que $A_0 = D_e \Psi$ est un automorphisme de l'Algèbre de Lie $T_e G$ et du moment que le groupe G est supposé simplement connexe, alors Ψ est un automorphisme de G . Donc le théorème de Wilson est démontré.

Preuve 3.1.5 (du théorème 3.1.2).

Désignons par $\mathcal{Z}$ le centre de l'Algèbre de Lie $T_e G$, et observons que si le groupe G est nilpotent d'indice de nilpotence $= 2$, alors :

$$\forall X, Y \in T_e G : [X, Y] \in \mathcal{Z}$$

Considérons pour $t \in R$ et $X, Y \in T_e G$ l'application :

$$L_{X,Y} : T_e G \longrightarrow T_e G$$

$$h \longrightarrow L(h) = \omega_{-tA_0(Y)} \left(A_0(\omega_{tX}(h)) \right)$$

L'expression de $L_{X,Y}(h)$ est :

$$L_{X,Y}(h) = A_0(h) + \frac{1}{2}t \cdot \left(A_0([X, h]) - [A_0(Y), A_0(h)] \right) - \frac{1}{4}t^2 [A_0(Y), A_0([X, h])]$$

$L_{X,Y}(h)$ est polynomiale d'ordre 2 en t . A_0 étant orthogonale pour Q , alors : $\forall t \in R$ et $\forall X, Y \in T_e G$ $L_{X,Y}$ est orthogonale pour la forme quadratique Q (c'est une composition d'isométries) .

Appliquons la proposition (3.1.3) : Q étant semi-définie et le centre $\mathcal{Z}$ ne contient aucun vecteur isotropes, l'opérateur :

$$h \longrightarrow [A_0(Y), A_0([X, h])]$$

qui prend ses valeurs dans le centre est donc $= 0$, ce qui entraîne que :

$$\forall X \in T_e G : A_0([X, h]) \in \mathcal{Z}$$

posons $Y = X$, $L_{X,X}(h)$ prend la forme :

$$L(h) = A_0(h) + \frac{1}{2}t \cdot \left(A_0([X, h]) - [A_0(X), A_0(h)] \right) - \frac{1}{4}t^2 [A_0(X), A_0([X, h])]$$

et l'opérateur :

$$h \longrightarrow A_0([X, h]) - [A_0(X), A_0(h)]$$

qui prend ses valeurs dans le centre est donc $= 0$ Donc :

$$\forall X \in T_e G : A_0([X, h]) - [A_0(X), A_0(h)] = 0$$

ceci signifie que $A_0 = D_e \Psi$ est un automorphisme de l'Algèbre de Lie $T_e G$ et du moment que le groupe G est supposé simplement connexe, alors Ψ est un automorphisme de G . Donc le théorème 3.1.2. est démontré .

Corollaire 3.1.1 .

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'Algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, g une métrique riemannienne invariante à gauche sur G définie par une forme quadratique Q sur $\mathfrak{g}$.

L'Algèbre de Lie du groupe des isométries de g qui conservent l'élément neutre est :

$$o(T_e G, Q) \cap \text{Der}(\mathfrak{g}).$$

où $o(T_e G, Q)$ désigne l'Algèbre orthogonale de $T_e G$ relativement à Q , et $\text{Der}(\mathfrak{g})$ l'Algèbre des dérivations de $\mathfrak{g}$.

Corollaire 3.1.2 .

Soit G un groupe de Lie nilpotent d'indice de nilpotence = 2 simplement connexe d'Algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

g une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur G définie par une forme quadratique semi-définie Q sur $\mathfrak{g}$. Supposons que le centre de $\mathfrak{g}$ ne contient aucun élément non dégénéré . Alors :

L'Algèbre de Lie du groupe des isométries de g qui conservent l'élément neutre est :

$$o(T_e G, Q) \cap \text{Der}(\mathfrak{g}).$$

où $o(T_e G, Q)$ désigne l'Algèbre orthogonale de $T_e G$ relativement à Q , et $\text{Der}(\mathfrak{g})$ l'Algèbre des dérivations de $\mathfrak{g}$.

Preuve 3.1.6 .

En effet , d'après les théorèmes (3.1.1) et (3.1.2) , le groupe des isométries en question est :

$$O(T_e G, Q) \cap \text{Aut}(G).$$

En passant aux Algèbres de Lie (voir [5]) , on obtient le résultat demandé .

3.2 Application aux groupes de Heisenberg pseudo-riemanniens $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$

On calculera dans les exemples suivants le groupe des isométries qui conservent l'élément neutre du groupe $H_{(2,1,1)}$ muni de la métrique pseudo-riemannienne :

$$g_{(2,1,1)} = dx^2 - dy^2 + dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2$$

et du groupe $H_{(1,1,2)}$ muni de la métrique pseudo-riemannienne :

$$g_{(1,1,2)} = dx^2 - dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2$$

Exemple 3.2.1 Le groupe $H_{(2,1,1)}$ (pseudo-riemannien).

Considérons le groupe $H_{(2,1,1)}$ muni de la métrique pseudo-riemannienne :

$$g_{(2,1,1)} = dx^2 - dy^2 + dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2$$

son Algèbre de Lie est $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$ muni de la multiplication :

$$\begin{cases} [e_1, e_3] = e_4 \\ [e_2, e_3] = e_4. \\ \text{les autres crochets sont nuls.} \end{cases}$$

$g_{(2,1,1)}$ étant définie par la forme quadratique :

$$Q(X, Y, Z, T) = X^2 - Y^2 + Z^2 + T^2$$

sur $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$,

L'Algèbre de Lie du groupe des isométries du groupe $H_{(2,1,1)}$ qui conservent l'élément neutre est d'après le lemme (3.1.1) :

$$o(R^4, Q) \cap Der(\mathcal{H}_{(2,1,1)}).$$

Or l'Algèbre orthogonale $o(R^4, Q)$ est de dimension 6

$$o(R^4, Q) = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{12} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{13} & a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \text{ telles que } a_{i,j} \in R \right\}$$

et elle est engendrée par les endomorphismes $F_{(i,j)}$ tels que :

$$\begin{cases} F_{(i,j)}(e_i) = -e_j & \text{si } i, j \neq 2 \\ F_{(i,j)}(e_j) = e_i & \text{si } i, j \neq 2 \\ F_{(i,2)}(e_i) = e_2 \\ F_{(1,2)}(e_2) = e_i \\ F_{(i,j)}(e_k) = 0 & \text{si } k \neq i, k \neq j \end{cases}$$

Seuls les endomorphismes $F_{(1,2)}, F_{(2,3)}$ sont des dérivations de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(2,1,1)}$. Donc :

$$o(R^4, Q) \cap Der(\mathcal{H}_{(2,1,1)}) \text{ est une Algèbre engendrée par } \{F_{(1,2)}, F_{(2,3)}\}$$

Elle est de dimension 2. Le groupe des isométries du groupe pseudo-riemannien $(H_{(2,1,1)}, g_{(2,1,1)})$ qui conservent l'élément neutre est donc engendré par les transformations :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cosh \theta & , & \sinh \theta & , & 0 & , & 0 \\ \sinh \theta & , & \cosh \theta & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Exemple 3.2.2 Le groupe $H_{(1,1,2)}$ (pseudo-riemannien).

Soit le groupe $H_{(1,1,2)}$ muni de la métrique :

$$g_{(1,1,2)} = dx^2 - dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2$$

L'Algèbre de Lie du groupe $H_{(1,1,2)}$ est $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$ muni de la multiplication :

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3 + e_4 \\ \text{les autres crochets sont nuls} \end{cases}.$$

$g_{(1,1,2)}$ étant définie par la forme quadratique :

$$Q(X, Y, Z, T) = X^2 - Y^2 + Z^2 + T^2$$

sur $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$,

L'Algèbre de Lie du groupe des isométries du groupe $H_{(1,1,2)}$ qui conservent l'élément neutre est donc :

$$o(R^4, Q) \cap Der(\mathcal{H}_{(1,1,2)}).$$

Or l'Algèbre orthogonale $o(R^4, Q)$ est de dimension 6

$$o(R^4) = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{12} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{13} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \text{ telles que } a_{i,j} \in R \right\}$$

et elle est engendrée par les endomorphismes $F_{(i,j)}$ tels que :

$$\begin{cases} F_{(i,j)}(e_i) = -e_j \\ F_{(i,j)}(e_j) = e_i \\ F_{(i,j)}(e_k) = 0 \quad \text{si } k \neq i \text{ et } k \neq j \end{cases}$$

Seul l'endomorphisme $F_{(1,2)}$ est une dérivation de l'Algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(1,1,2)}$.

Donc :

$$o(R^4, Q) \cap Der(\mathcal{H}_{(1,1,2)}) \quad \text{est une Algèbre engendrée par } F_{(1,2)}.$$

Elle est donc de dimension = 1 . Le groupe des isométries du groupe pseudo-riemannien $(H_{(1,1,2)}, g_{(1,1,2)})$ qui conservent l'élément neutre est donc engendré par la transformation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cosh \theta & , & \sinh \theta & , & 0 & , & 0 \\ \sinh \theta & , & \cosh \theta & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

Distributions totalement géodésiques des groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$.

Dans [10] , Th HANGAN a montré que dans les groupes de Heisenberg riemanniens H_{2p+1} , toute distribution intégrable D totalement géodésique est de $\text{codim} \geq 2$. Par ailleurs , N et S RAHMANI [20] ont observé que dans H_3 il existe une métrique Lorentzienne qui admet une distribution intégrable de $\text{codim} = 1$. On se propose dans ce chapitre de montrer par deux contre-exemples qu'en dimension $= 4$, le théorème de Th.HANGAN n'est plus valable même dans le cas riemannien . Il demeure alors ouvert le problème de caractériser en général les groupes de Heisenberg $H_{(G,L,K)}^f$ pour lesquels le théorème de Th. HANGAN est vrai ?

Ce problème sera formulé à la fin du chapitre IV .

4.1 Hyper-surfaces totalement géodésiques dans les groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$.

Connection de levi-Civita .

Soient G un groupe de Lie , g une métrique invariante à gauche sur G définie par une forme quadratique Q sur $T_e G$.

ω désigne la forme de Maurer-Cartan de G . On supposera comme toujours

que ω s'écrit :

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}.$$

où

$$B^* = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

est la base duale d'une base de champs de vecteurs orthogonaux relativement à g et invariants à gauche :

$$B = \{X_1, \dots, X_n\}$$

On écrit g dans la base B (avec $\lambda_i \in R^*$) sous la forme :

$$g_x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \cdot \omega_i^2$$

Le produit scalaire de deux champs de vecteurs X_i et X_j est :

$$\langle X_i, X_j \rangle = \lambda_i \cdot \delta_{i,j} \quad (4.1)$$

Désignons par C_{ij}^k les constantes de structure du groupe G :

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k. \quad (4.2)$$

et par Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel de la connection de Lévi-Civita ∇ associée à la métrique g :

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{i,j}^k X_k. \quad (4.3)$$

Dans ces conditions , on a la proposition :

Proposition 4.1.1 .

Les symboles de Christoffel $\Gamma_{i,j}^k$ de la connection de Levi-Civita ∇ associée à la métrique g vérifient l'égalité :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (C_{ij}^k + \frac{\lambda_i}{\lambda_k} C_{kj}^i + \frac{\lambda_j}{\lambda_k} C_{ki}^j). \quad (4.4)$$

Pour une démonstration voir [7].

Distributions totalement géodésiques.

Définition 4.1.1 .

Une distribution D de codimension k sur une variété riemannienne (M, g) est dite totalement géodésique si toute géodésique tangente en un point à D est tangente partout à D .

Remarque 4.1.1 .

La définition signifie que si la géodésique est transverse en un point à D , elle est transverse partout .

Proposition 4.1.2 (*Caractérisation des distributions totalement géodésiques*).

1) La distribution D est totalement géodésique si et seulement si :

$$X, Y \in C^\infty(D) \quad \Rightarrow \quad \nabla_X Y + \nabla_Y X \in C^\infty(D)$$

2) Si la distribution D est intégrable , alors D est totalement géodésique si et seulement si

$$X, Y \in C^\infty(D) \quad \Rightarrow \quad \nabla_X Y \in C^\infty(D)$$

3) Si D est intégrable , D est totalement géodésique si et seulement si

$$X, Y, Z \in C^\infty(D) \quad \Rightarrow \quad R(X, Y)Z \in C^\infty(D)$$

Application aux groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$.

On a défini dans le chapitre I deux groupes de Heisenberg de dimension 4 :

1) Le groupe $H_{(2,1,1)}$. C'est l'espace R^4 muni de la multiplication :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \\ t + t' + \frac{1}{2}(x'z - xz') + \frac{1}{2}(y'z - yz') \end{pmatrix}$$

de centre R , et dont la forme de Maurer-Cartan est :

$$\omega = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \end{pmatrix}$$

son Algèbre de Lie est :

$\mathcal{H}_{(2,1,1)} = R^4$ muni de la multiplication :

$$\left\{ \begin{array}{l} [e_1, e_3] = e_4 \\ [e_2, e_3] = e_4. \\ \text{les autres crochets sont nuls.} \end{array} \right.$$

Si l'on munit $H_{(2,1,1)}$ de sa métrique riemannienne :

$$g_{(2,1,1)} = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2.$$

alors la connection de Levi-Civita ∇ associée à la métrique $g_{(2,1,1)}$ est donnée d'après la formule (4.4) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_1 e_3 = \frac{1}{2}e_4 \quad \nabla_1 e_4 = -\frac{1}{2}e_3 \\ \nabla_2 e_3 = \frac{1}{2}e_4 \quad \nabla_2 e_4 = -\frac{1}{2}e_3 \\ \nabla_3 e_1 = -\frac{1}{2}e_4 \quad \nabla_3 e_2 = -\frac{1}{2}e_4 \quad \nabla_3 e_4 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ \nabla_4 e_1 = -\frac{1}{2}e_3 \quad \nabla_4 e_2 = -\frac{1}{2}e_3 \quad \nabla_4 e_3 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \end{array} \right.$$

2) Le groupe $H_{(1,1,2)}$ est l'espace R^4 muni de la multiplication :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' + \frac{1}{2}(x'y - xy') \\ t + t' + \frac{1}{2}(x'y - xy') \end{pmatrix}$$

son centre de $H_{(1,1,2)}$ est R^2

et sa forme de Maurer-Cartan est :

$$\omega = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \\ dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \end{pmatrix}$$

son Algèbre de Lie est $\mathcal{H}_{(1,1,2)} = R^4$ muni de la multiplication :

$$\left\{ \begin{array}{l} [e_1, e_2] = e_3 + e_4 \\ \text{les autres crochets sont nuls.} \end{array} \right.$$

Si l'on munit $H_{(1,1,2)}$ de sa métrique riemannienne :

$$g_{(1,1,2)} = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2.$$

la connexion ∇ associée à la métrique $g_{(1,1,2)}$ est donnée d'après (4.4) par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla_1 e_2 = \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_4 & \nabla_1 e_3 = -\frac{1}{2}e_2 & \nabla_1 e_4 = -\frac{1}{2}e_2 \\ \nabla_2 e_1 = -\frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4 & \nabla_2 e_3 = \frac{1}{2}e_1 & \nabla_2 e_4 = \frac{1}{2}e_1 \\ \nabla_3 e_1 = -\frac{1}{2}e_2 & \nabla_3 e_2 = \frac{1}{2}e_1 & \\ \nabla_4 e_1 = -\frac{1}{2}e_2 & \nabla_4 e_2 = \frac{1}{2}e_1 & \end{array} \right.$$

**Distributions totalement géodésiques.
dans les groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$.**

Théorème 4.1.1 (*T.Hangan [10]*).

Toute distribution intégrable totalement géodésique sur le groupe riemanien H_{2p+1} est au moins de codimension 2 .

contrairement à ce qui se passe dans les groupes de Heisenberg riemanniens de dimensions impaires H_{2p+1} , les groupes de Heisenberg riemanniens $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$ de dimension = 4 possèdent chacun une distribution intégrable totalement géodésique de codimension = 1 .

Proposition 4.1.3 .

Le groupe de Heisenberg $H_{(2,1,1)}$ muni de la métrique riemannienne :

$$g_{(2,1,1)} = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(zdx - xdz) + \frac{1}{2}(zdy - ydz) \right)^2.$$

possède une distribution intégrable totalement géodésique de codim = 1 .

Preuve 4.1.1 .

Soit :

$$B = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}.$$

une base de champs de vecteurs invariants à gauche sur $H_{(2,1,1)}$. :

$$B^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

sa base duale .

Considérons la distribution intégrable D de codimension 1 sur $H_{(2,1,1)}$ définie par l'équation de Pfaff :

$$\theta = \omega_1 - \omega_2 = 0. \tag{4.5}$$

les ω_i étant les composantes de la forme de Maurer-cartan ω du groupe $H_{(2,1,1)}$
 Les champs de vecteurs :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_3 \\ Y_3 = X_4 \end{cases} \quad (4.6)$$

forment une base de la distribution D .

On a :

$$\begin{cases} \nabla_{Y_1} Y_1 = 0. \\ \nabla_{Y_1} Y_2 = Y_3. \\ \nabla_{Y_1} Y_3 = -Y_2. \\ \nabla_{Y_2} Y_1 = -Y_3. \\ \nabla_{Y_2} Y_2 = 0. \\ \nabla_{Y_2} Y_3 = \frac{1}{2} Y_1. \\ \nabla_{Y_3} Y_1 = -Y_2. \\ \nabla_{Y_3} Y_2 = \frac{1}{2} Y_1. \\ \nabla_{Y_3} Y_3 = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

La distribution D définie par l'équation de Pfaff (4.5) est intégrable . Les identités (4.7) montrent que :

$$\forall Y_i, Y_j \in C^\infty(D) \quad \nabla_{Y_i} Y_j \in C^\infty(D).$$

et la proposition (4 .1 .2) entraine que D qui est de codimension = 1 est totalement géodésique .

Ce qui prouve la proposition .

Proposition 4.1.4 .

Le groupe $H_{(1,1,2)}$ muni de la métrique riemannienne :

$$g_{(1,1,2)} = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2 + \left(dt + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2.$$

possède une distribution intégrable totalement géodésique de codim = 1 .

Preuve 4.1.2 .

Soit :

$$B = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}.$$

une base de champs de vecteurs invariants à gauche sur $H_{(1,1,2)}$:

$$B^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

sa base duale . Considérons la distribution intégrable D de codimension 1 sur $H_{(1,1,2)}$ définie par l'équation de Pfaff :

$$\theta = \omega_3 - \omega_4 = 0. \quad (4.8)$$

les ω_i étant les composantes de la forme de Maurer-cartan ω du groupe $H_{(1,1,2)}$.

Les champs de vecteurs :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_2 \\ Y_3 = X_3 + X_4 \end{cases} \quad (4.9)$$

forment une base de la distribution D .

On a :

$$\begin{cases} \nabla_{Y_1} Y_1 = 0. \\ \nabla_{Y_1} Y_2 = \frac{1}{2} Y_3. \\ \nabla_{Y_1} Y_3 = -Y_2. \\ \nabla_{Y_2} Y_1 = -\frac{1}{2} Y_3. \\ \nabla_{Y_2} Y_2 = 0. \\ \nabla_{Y_2} Y_3 = Y_1. \\ \nabla_{Y_3} Y_1 = -Y_2. \\ \nabla_{Y_3} Y_2 = Y_1. \\ \nabla_{Y_3} Y_3 = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

La distribution D définie par l'équation de Pfaff (4.8) est intégrable . Les identités (4.10) montrent que :

$$\forall Y_i, Y_j \in C^\infty(D) \quad \nabla_{Y_i} Y_j \in C^\infty(D).$$

et la proposition (4.1.2) entraîne que D qui est de codimension = 1 est totalement géodésique .

Ce qui prouve la proposition .

Il demeure donc ouvert le problème de caractériser en général les groupes de Heisenberg $H_{(G,L,K)}^f$ pour lesquels le théorème de T.HANGAN est valable . Plus précisément , on pose le problème suivant :

Problème.

Soit $H_{(G,L,K)}^f$ le groupe de Heisenberg associé à un triplet de groupes de Lie G , L , K par un bi-homomorphisme de groupes de Lie :

$$f : G \times L \longrightarrow Z(K)$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

On suppose que $H_{(G,L,K)}^f$ est muni d'une métrique invariante à gauche g . Quelles conditions doivent vérifier d'une part les groupes de Lie G , L , K et le bi-homomorphisme de groupes de Lie f , d'autre part la métrique g pour que toute distribution intégrable totalement géodésique D sur le groupe de Heisenberg $H_{(G,L,K)}^f$ soit au moins de codimension égale à $\dim Z(K) + 1$?

Bibliographie

- [1] Bass,J. *Cours de Mathématiques , Tome II.* 5^e édition , MASSON .
- [2] Bekkar.M , *Thèse* . Université de Haute Alsace . 1993.
- [3] Bekkar.M , *Exemples de surfaces minimales dans l'espace de Heisenberg.* Rend. Del. Sem. Univ. Cagliari , Vol.61 , Fasc.2 , (1991).
- [4] Dieudonné,J. *Éléments d'analyse , Tome III.* Gauthier-villars .
- [5] Dieudonné,J. *Éléments d'analyse , Tome IV.* Gauthier-villars .
- [6] Dieudonné,J. *Éléments d'analyse , Tome V.* Gauthier-villars .
- [7] Doubrovine,B. Novikov,S .Fomenko,F . *Géométrie contemporaine . Méthodes et Applications* . Éditions Mir Moscou . 1982.
- [8] Goze,M and Haraguchi,Y. *Sur les r-systèmes de contact*, C.R.A.S. Paris. Sér.I Math.294(1982),95.
- [9] M.Goze et KhaKimdjanov,Y. *Algèbres de Lie nilpotentes complexes.* Prépublications de L'I.R.M.A. Strasbourg. 1993 .
- [10] Hangan ,Th . *Sur les distributions totalement géodésiques du groupe nilpotent riemannien H_{2p+1}* . Sem.Fac.Sienze Un Cagliari,1985,Fasc 1
- [11] Haraguchi,Y *Sur une généralisation des structures de contact.* Thèse,Mulouse 1981 .
- [12] Helgason,S. *Differential Geometry and Symetric Spaces.* Academic Press. New York , San Francisco , London . 1982 .
- [13] Humphreys , J-E . *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Graduate Texts in Mathematics , Springer-VerlagRend .
- [14] Malliavin , P. *Géométrie différentielle intrinsèque.* Collection enseignement des sciences . Hermann.
- [15] Piu,P and Goze,M . *On the riemannian geometry of the nilpotent groups $H_{(p,q)}$* Proceeding of the American Mathematical Society Vol 119,Number 2 , October 1983 .
- [16] Piu,P and Goze,M . *Classification des métriques invariantes à gauche sur le groupe de Heisenberg* . Rendiconti Del circolo Mathematico di Palermo Serie II Tomo XXXIX (1990) pp.299-306

- [17] Piu,P and Goze,M. *On the Riemannian Geometry of the nilpotent groups $H(p,r)$* . Proceeding of the American Society . Vol 119 , Number 2 October 1993 .
- [18] Postnikov,M. *Leçons de géométrie*. Éditions MIR . Moscou 1982.
- [19] Rahmani,S. *Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois*. Journal of Geometry and Physics 9(1982)295-302. North-Holland .
- [20] Rahmani,N and Rahmani,S. *Lorentzian Geometry of the Heisenberg group* . Geometriae Dedicata (2006) 118 : 133-140 DOI 10.1007/s10711-005-9030-3 Springer 2006 .
- [21] Wilson, E. N . *Isometry groups on homogeneous nilmanifolds* . Geom , Dedicata 12 (1982) , 337-346 .

RÉSUMÉ

Ce mémoire de magister est constitué d'une introduction , de quatre chapitres et d'une bibliographie. Son objet principal est l'étude des métriques invariantes à gauche sur les groupes de Heisenberg de dimension quatre.

Dans le premier chapitre sont introduits et étudiés les groupes $H_{(G,L,K)}^f$ qui généralisent les groupes $H_{(p,q)}$ de GOZE et HARAGUCHI, ainsi que les Algèbres $\mathcal{H}_{(g,L,K)}^F$ qui sont les Algèbres de Lie des groupes $H_{(G,L,K)}^f$. On obtient ainsi comme cas particuliers les groupes non isomorphes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$, et on montre que ce sont les seuls groupes de Heisenberg de dimension quatre . Dans le deuxième chapitre , on donne une classification des métriques riemanniennes , et selon la signature des métriques pseudo-riemanniennes des groupes $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$. Nos résultats sont les analogues en dimension quatre d'un théorème de classification des métriques Lorentziennes sur H_3 du à S.RAHMANI .

Le troisième chapitre étudie le groupe des isométries d'une métrique invariante à gauche sur un groupe de Lie non nécessairement nilpotent . On donne ensuite une application aux groupes pseudo-riemanniens $H_{(2,1,1)}$ et $H_{(1,1,2)}$.

Dans le chapitre quatre , on s'intéresse à un autre phénomène . on montre par deux contre-exemples que le théorème de T.Hangan qui stipule que sur le groupe de Heisenberg H_{2p+1} toute distribution D intégrable et totalement géodésique est nécessairement de codimension ≥ 2 n'est pas vrai en dimension quatre .

En conclusion , on pose le problème suivant :

Problème.

Soit $H_{(G,L,K)}^f$ le groupe de Heisenberg associé au triplet de groupes de Lie : G , L , K par le bi-homomorphisme

$$f : G \times L \longrightarrow Z(K)$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

On supposera que $H_{(G,L,K)}^f$ est muni d'une métrique g invariante à gauche . Quelles conditions doivent vérifier d'une part les groupes de Lie G , L , K , et le bi-homomorphisme de groupes de Lie f , d'autre part la métrique g pour que toute distribution intégrable totalement géodésique D sur le groupe de Heisenberg $H_{(G,L,K)}^f$ soit au moins de codimension égale à $\dim(Z(K)) + 1$?

MOTS CLES

- 1) Groupes de Heisenberg .
- 2) Métriques invariantes à gauche .
- 3) Distributions totalement géodésiques .