



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

كلية العلوم الدقيقة والتطبيقية
Faculté des sciences exactes et appliquées

FSEA 2025/2026

THÈSE

En vue de l'obtention du diplôme
de Doctorat en Sciences

Spécialité: Mathématiques appliquées

Présentée par : **MEROUANI Mohamed**

Stability and blow-up for some hyperbolic systems

Soutenue publiquement le 26/01/2026 devant le jury composé de:

Membres du jury	Nom et prénom	Grade	Université de rattachement
Présidente	NACHI Khadra	Professeur	Univ.Oran1-A.B
Directeur de Thèse	OUCHENANE Djamel	Professeur	Univ. Laghouat
Codirecteur de Thèse	TIMIMOUN Chahnaz Zakia	MCA	Univ.Oran1-A.B
Examineur	BOUDAUD Fatima	Professeur	Univ.Oran1-A.B
Examineur	YAGOUR Ameur	Professeur	Univ.Laghouat
Examineur	HAKEM Ali	Professeur	Univ. Sidi Bel Abbès
Invité	YAZID Fares	MCA	Univ. Laghouat

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à tous les membres de ma famille, en particulier
à mon père Ali, que Dieu le protège, à ma femme et à mes enfants,
aux enfants de mon frère, à ma sœur et à ses enfants, ainsi qu'à ma tante,
à mon oncle et à toute sa famille, et à toute la famille de ma femme.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH**, le Tout-Puissant et le Miséricordieux, qui m'a accordé la force et la patience nécessaires pour mener à bien ce modeste travail.

Je remercie en premier lieu mon directeur de thèse, **le Professeur Djamel Ouchenane**, qui a toujours été à l'écoute, et qui m'a conseillé, encouragé et guidé. Il est à l'origine de ce travail. Avec une grande patience et beaucoup de bienveillance, je lui exprime ma profonde gratitude pour sa disponibilité, et ce fut un réel plaisir de travailler sous sa direction.

Je suis très reconnaissant envers **le Professeur Chahnaz Zakia Timimoun**, qui a toujours été présente pour m'apporter son soutien administratif et académique à l'Université d'Oran 1.

Je remercie vivement **le Professeur Nachi Khadra** de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, ainsi que les examinateurs : **le Professeur Boudaoud Fatima**, **le Professeur Hakem Ali** et **le Professeur Yagoub Ameer**, pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse et pour leurs précieux commentaires et suggestions. Je remercie également **le Docteur Yazid Fares** d'avoir accepté l'invitation à participer à ma soutenance.

Je remercie **le Docteur Choucha Abdelbaki** pour son soutien scientifique et ses encouragements.

Je remercie également **les Docteurs Madani Belabbas**, **Douib Madani** et **Mostefai Mohamed Lamine** pour leurs encouragements.

Enfin, je rends hommage à l'ensemble des enseignants du département de mathématiques de **l'École Normale Supérieure de Laghouat**.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème de l'existence et de l'unicité de la solution locale ainsi que l'explosion de la solution en un temps fini pour un système d'équations différentielles de type Kirchhoff comportant une non-linéarité logarithmique, des effets de retard et des conditions d'amortissement de type Balakrishnan–Taylor.

Nous avons également étudié un autre système similaire. Pour démontrer les résultats, nous avons utilisé la méthode qui repose sur la construction d'un opérateur $L(t)$ équivalent topologiquement à la fonction énergie et satisfaisant à l'inégalité différentielle : $\frac{dL(t)}{dt} \geq \xi L^{1+\nu}(t)$.

Les résultats obtenus contribuent à une meilleure compréhension des interactions complexes dans les systèmes viscoélastiques régis par ce type de systèmes d'équations.

Mots-clés : Équation de Kirchhoff, explosion de la solution, terme de retard, terme viscoélastique, non-linéarité logarithmique.

Abstract

In this thesis, we studied the problem of existence and uniqueness of the local solution, as well as the blow-up of the solution in finite time, for a system of differential equations of Kirchhoff type involving a logarithmic nonlinearity, delay effects, and Balakrishnan–Taylor-type damping conditions. We also examined another similar system.

To establish the results, we used the method which is based on the construction of an operator $L(t)$ that is topologically equivalent to the energy function and satisfies the differential inequality: $\frac{dL(t)}{dt} \geq \xi L^{1+\nu}(t)$.

The results obtained contribute to a better understanding of the complex interactions in viscoelastic systems governed by this type of differential equations.

Key words: Kirchhoff equation, solution blow-up, delay term, viscoelastic term, logarithmic nonlinearity.

ملخص

درسنا في هذه الأطروحة مشكل ووحداية الحل المحلي وكذا انفجار الحل في لحظة منتهية لجملة معادلات تفاضلية من نوع كيرشوف تحتوي على لا خطية لوغاريتمية وتأثيرات التأخير وشروط التخميد بالاكريشنان-تايلور وكذا جملة أخرى مشابهة لها، استعملنا في برهان النتائج الطريقة التي تركز على بناء مؤثر $L(t)$ يكافئ دالة الطاقة طبولوجيا ويحقق المتراجحة التفاضلية:

$$\frac{dL(t)}{dt} \geq \xi L^{1+v}(t).$$

تساهم النتائج في فهم التفاعلات المعقدة في الأنظمة اللزجة التي تحكمها معادلات من هذا النوع.

الكلمات المفتاحية: معادلة كيرشوف، انفجار الحل، شرط التأخير، مصطلح اللزوجة، لاخطية لوغاريتمية

Table des matières

Introduction	1
0.1 Méthode de concavité	1
0.2 Méthode d'inégalité différentielle	3
0.3 Notion d'explosion	10
1 Préliminaires	12
1.1 Équation de Kirchhoof et autres éléments	12
1.2 Quelques espaces fonctionnels de base	15
1.3 Quelques inégalités utiles	19
1.4 Quelques notions sur les opérateurs	21
1.5 Existence et unicité de la solution	23
2 Existence locale et blow-up pour une équation d'onde viscoélastique non linéaire à retard distribué	26
2.1 Introduction	26
2.2 Existence locale	30
2.3 Explosion	38
3 Explosion de la solution d'un système viscoélastique avec une non-linéarité logarithmique de type kirchhoff	48
3.1 Introduction	48

3.2 Résultat d'explosion	56
Conclusion	62
Résumé de thèse	63
Bibliographie	66

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'explosion dans le temps, elle s'articule autour de trois chapitres.

Après une introduction générale, Le premier chapitre présente les outils préliminaires indispensables à l'étude ainsi que certains éléments de base.

Les deux derniers chapitres constituent le cœur de ce travail ; ils sont consacrés à l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires comprenant un terme d'amortissement dégénéré ainsi qu'un terme source fortement non linéaire.

Nous y prouvons l'explosion en temps fini de la solution en recourant à deux méthodes

0.1 Méthode de concavité

La méthode de concavité a été introduite par Levine en 1973. Cette méthode est largement applicable pour démontrer l'explosion des solutions des équations différentielles en temps fini.

Le principe de cette méthode repose sur la construction d'une fonction positive $F(t)$ qui vérifie l'inégalité différentielle suivante :

$$\frac{d^2 F^{-\alpha}(t)}{dt^2} \leq 0, \dots\dots\dots \alpha > 0$$

Par intégration de cette inégalité deux fois sur l'intervalle $[0, T]$, on obtient

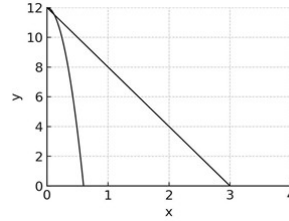
$$F^\alpha(t) \geq \frac{F^{\alpha+1}(0)}{F(0) - t\alpha F'(0)}$$

La fonction $F^\alpha(t)$ est minorée par une fonction qui explose en un temps fini à condition que $F'(0) > 0$.

L'explosion aura lieu avant où l'instant

$$T^* = \frac{F(0)}{\alpha F'(0)} > 0.$$

0.1.1 Interprétation géométrique



Comme $F'(0) > 0$ nous avons $(F^{-\alpha})'(0) < 0$. Donc la courbe de $F^{-\alpha}(t)$ est située en dessous de la tangente issue du point $(0, F^{-\alpha}(0))$.

D'autre part, la courbe étant concave, elle doit couper l'axe des temps en T_c qui représente la valeur exacte du temps d'explosion.

Cette valeur est exprimée par la valeur T^* du point d'intersection de la tangente avec l'axe des temps.

On déduit l'explosion de $F^\alpha(t)$ en T_c c-à-d

$$\lim_{t \rightarrow T_c} F^\alpha(t) = +\infty$$

Remarque 0.1. Pour que la méthode de concavité soit applicable il faut que F satisfasse

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F^{-\alpha}(t)}{dt^2} &= (-\alpha F'(t) F^{-(\alpha+1)}(t))' = -\alpha F''(t) F^{-(\alpha+1)}(t) + \alpha(\alpha+1)(F'(t))^2 F^{-\alpha-2}(t) \\ &= -\alpha F^{-\alpha-2}(t) [F(t) F''(t) - (\alpha+1)(F'(t))^2]. \end{aligned}$$

Ainsi pour prouver que $F^\alpha(t)$ explose en un temps fini il suffit de montrer que

$$FF'' - (1 + \alpha)(F')^2 \geq 0$$

pour un certain $\alpha > 0$.

0.2 Méthode d'inégalité différentielle

Cette méthode repose sur la construction d'une fonction auxiliaire L , qui constitue une perturbation de l'énergie totale qui satisfait l'inégalité différentielle définie dans le lemme suivant

Lemme 0.1. *Soit $\nu > 0$, et soit $L(t)$ une solution de l'inéquation différentielle ordinaire suivante :*

$$\frac{dL(t)}{dt} \geq \xi L^{1+\nu}(t) \quad (0.1)$$

définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Si $L(0) > 0$, alors la solution n'existe pas pour

$$t \geq L(0)^{-\nu} \xi^{-\nu} \nu^{-1}$$

Démonstration. L'intégration directe de (0.1) donne

$$L^\nu(t) \geq [L^\nu(0) - \xi \nu t]^{-1} \quad (0.2)$$

Il est clair que le membre à droite de (0.2) est non borné pour

$$\xi \nu t = L^{-\nu}(t)$$

Ceci termine la démonstration du lemme. □

Pour notre contribution, on étudie le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t|^p u_{tt} - M(t) \Delta u(t) + \int_0^t h(t-\varrho) \Delta u(\varrho) d\varrho - \Delta u_{tt}(t) \\ + \beta_1 |u_t(t)|^{m-2} u_t(t) + \beta_2 |u_t(t-\tau)|^{m-2} u_t(t-\tau) = u|u|^{\gamma-2} \ln |u|^k. \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \text{in } \Omega \\ u_t(x, t-\tau) = f_0(x, t-\tau), \quad \text{in } \Omega \times (0, \tau) \\ u(x, t) = 0, \quad \text{in } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{array} \right. \quad (0.3)$$

où $M(t) := \left(\zeta_0 + \zeta_1 \|\nabla u\|_2^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))_{L^2(\Omega)} \right)$ fonction de Kirchhoff,

et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné à frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$. $\gamma \geq 2$.

Les équations d'ondes non linéaires ont fait l'objet de nombreuses recherches mathématiques en raison de leur rôle fondamental dans la modélisation d'un large éventail de phénomènes physiques et d'ingénierie, y compris l'élasticité, la dynamique des fluides et l'électromagnétisme. L'interaction entre les effets dissipatifs et les forces externes ou internes donne souvent lieu à des comportements dynamiques complexes tels que l'existence globale, la décroissance ou l'explosion en temps fini des solutions.

Dans ce contexte, les systèmes impliquant un amortissement non linéaire et des termes sources ont reçu une attention particulière car ils résument à la fois des influences stabilisantes et déstabilisantes (par exemple, [4], [19], [20], [70])

Un phénomène clé étudié dans de tels systèmes est l'explosion en temps fini des solutions, où l'énergie ou une norme de la solution devient non bornée en un temps fini. Le fait qu'une solution explose ou existe globalement dépend de manière critique de la relation entre les termes d'amortissement et les termes de source, de la structure de la non-linéarité, et de la géométrie du domaine.

Le défi mathématique réside dans la détermination des conditions précises sous lesquelles l'explosion se produit, ainsi que dans la compréhension des mécanismes qui la provoquent.

La littérature relative aux problèmes d'explosion dans les équations d'onde scalaires comportant des termes de source et d'amortissement non linéaires (par exemple, [61]) a été étudiée en profondeur. Une première contribution a été apportée par Levine [50]

utilisant la méthode de concavité, qui a prouvé l'explosion en exploitant la convexité des fonctionnelles d'énergie.

Cette approche a depuis été améliorée et étendue à d'autres modèles, notamment aux équations d'onde présentant des effets de mémoire, un amortissement viscoélastique et des non-linéarités dégénérées.

Les systèmes couplés introduisent des difficultés mathématiques supplémentaires en raison des interactions entre les composants, ce qui peut produire soit une dissipation accrue (effet stabilisateur), soit une instabilité accrue (favorisant l'explosion). Certaines contributions récentes (par exemple, [27],[48]) ont étudié l'explosion dans de tels cadres couplés, mais de nombreuses questions restent ouvertes, notamment concernant la manière dont les différents types d'amortissement et de non-linéarités de source interagissent.

L'équation d'onde avec amortissement et termes sources

$$\varphi_{tt} - \Delta \varphi + a |\varphi_t|^{\eta_1-2} \varphi_t = b |\varphi|^{p-2} \varphi, \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega,$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N > 1$) est un domaine borné avec une frontière lisse $\partial\Omega$, apparaît dans plusieurs contextes physiques, tels que l'élasticité non linéaire, l'acoustique, la physique des plasmas et les milieux viscoélastiques.

Dans ce modèle, le terme Δu représente la force de rappel élastique, tandis que le terme d'amortissement non linéaire $a |\varphi_t|^{\eta_1-2} \varphi_t$ modélise les mécanismes dissipatifs tels que le frottement interne ou la résistance dans un milieu non linéaire. Le terme source $b |\varphi|^{p-2} \varphi$ peut décrire une injection d'énergie ou le forçage externe, tels que les phénomènes d'amplification ou les mécanismes de rétroaction non linéaire dans certains systèmes physiques.

L'interaction entre la dissipation d'énergie et l'apport d'énergie joue un rôle crucial dans la détermination du comportement asymptotique des solutions. Lorsque le terme source est absent ($b = 0$), la dissipation domine et les solutions restent globalement

bornées, satisfaisant l'estimation d'énergie

$$\|\varphi_t(t)\|_2 + \|\nabla \varphi(t)\|_2 \leq C$$

pour tout $t \geq 0$, où $C > 0$ dépend des données initiales mais pas du temps ; voir [42],[48]. Cela reflète l'intuition physique selon laquelle, en l'absence de forçage externe, l'énergie du système finit par se stabiliser en raison de la dissipation.

Inversement, si l'amortissement est absent ($a = 0$), l'apport continu d'énergie par le terme source peut conduire à une croissance illimitée de la solution en temps fini, correspondant physiquement à une rupture ou à une instabilité du système. Mathématiquement, il existe $T^* < \infty$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \|\varphi(t)\| = +\infty$$

comme on observe dans [5],[45] le cas de l'amortissement et du terme source est nettement plus complexe à analyser.

Dans le cas de l'amortissement linéaire ($\eta_1 = 2$) , en utilisant la technique de concavité, il a montré qu'une énergie initiale suffisante pouvait conduire à une explosion à temps fini.

Cette technique consiste à construire une fonctionnelle $\phi(t)$ pour laquelle $\phi^{-\gamma}(t)$ est concave pour un certain $\gamma > 0$, de sorte que $\phi^{-\gamma}(t)$ tende vers zéro en temps illimité ainsi l'explosion.

Du point de vue des principes de l'énergie physique, cette technique s'est imposée comme un pilier de l'étude des phénomènes d'explosion.

Pour l'amortissement non linéaire ($\eta_1 > 1$), Georgiev et Todorova [35] ont introduit une autre approche, en choisissant une fonctionnelle auxiliaire de type énergie $L(t)$ avec :

$$\frac{dL(t)}{dt} \geq \xi L^{1+\nu_1}(t), \quad t \in [0, +\infty[,$$

où les constantes sont données par $\xi > 0$, et $\nu_1 > 0$.

Cette inégalité fournit la base pour utiliser la méthode de concavité afin de démontrer que $L(0) > 0$. Ce qui implique, à son tour, l'explosion en temps fini de la suite correspondante, traduisant physiquement des situations où le terme de source surmonte l'amortissement, même lorsque la dissipation est non linéaire.

Cependant, leur critère n'était pas optimal et plusieurs améliorations ont été proposées (voir [52],[58],[71]). En particulier, Vitillaro [71] a étendu ces résultats pour inclure des solutions avec une énergie initiale positive, clarifiant davantage l'équilibre entre l'apport d'énergie et la dissipation.

Dans les travaux [3], Agre et al. ont examiné un système d'équations d'ondes non linéaires couplées de la forme

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta\varphi + |\varphi_t|^{\eta_1-1} \varphi_t = G_1(\varphi, \psi) \\ \psi_{tt} - \Delta\psi + |\psi_t|^{\omega-1} \psi_t = G_2(\varphi, \psi) \end{cases}$$

posé sur $]0, T[\times \Omega$ et soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et à des données initiales appropriées.

Les termes sources non linéaires G_1 et G_2 sont donnés par

$$\begin{aligned} G_1(\varphi, \psi) &= b_1 |\varphi + \psi|^{2(\rho_1+1)} (\varphi + \psi) + b_2 |\varphi|^{\rho_1} \varphi |\psi|^{\rho_1+2} \\ G_2(\varphi, \psi) &= b_1 |\varphi + \psi|^{2(\rho_1+1)} (\varphi + \psi) + b_2 |\varphi|^{\rho_1+2} |\psi|^{\rho_1} \psi^2 \end{aligned}$$

où b_1, b_2 et ρ_1 sont des paramètres réels. Sous des hypothèses appropriées, les auteurs ont établi des résultats d'existence locale et globale, mais aucune estimation de la décroissance des solutions globales n'a été obtenue.

De plus, il a été démontré que les solutions possédant une énergie initiale négative explosent en temps fini.

En utilisant une approche analogue à celle de ([4], [19], [35], [49], [65], [70]),

Dans [69] M. A. Rammaha et son collaborateur ont étudié un système d'équations d'ondes non linéaires intégrant à la fois un amortissement non linéaire et des termes

sources puissants, donné par :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta\varphi + (d|\varphi|^k + e|\psi|^l)|\varphi_t|^{\eta_1-1}\varphi_t = G_1(\varphi, \psi), \\ \psi_{tt} - \Delta\psi + (d'|\psi|^\theta + e'|\varphi|^p)|\varphi_t|^{\omega-1}\varphi_t = G_2(\varphi, \psi), \end{cases}$$

dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), sous des conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

Le système modélise des interactions pour lesquelles les termes d'amortissement et de source dépendent de manière non linéaire de la solution et de ses dérivées.

Les auteurs ont établi des résultats d'existence locale et globale dans des conditions spécifiques sur les exposants et les coefficients, et ont en outre démontré que l'explosion en temps fini se produit lorsque l'énergie initiale est négative et que les termes de source dominant la dissipation.

Leur analyse, motivée en partie par des applications en modélisation physique, met en évidence l'équilibre délicat entre l'apport d'énergie et la dissipation dans la dynamique des ondes non linéaires. De tels systèmes apparaissent naturellement dans divers domaines, notamment la mécanique des milieux continus et l'acoustique non linéaire.

Dans [72], Z. Young a étudié le problème d'évolution non linéaire suivant :

$$\varphi_{tt} - \Delta\varphi_t - \operatorname{div}(|\nabla\varphi|^{\alpha-2}\nabla\varphi) - \operatorname{div}(|\nabla\varphi_t|^{\beta-2}\nabla\varphi_t) + a|\varphi_t|^{\eta_1-2}\varphi_t = b|\varphi|^{p-2}\varphi,$$

posée dans le cylindre espace-temps $]0, T[\times \Omega$ et complétée par des données initiales appropriées et soumises à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

L'auteur a démontré que, si l'énergie initiale est suffisamment négative et que les paramètres remplissent certaines conditions, les solutions explosent en temps fini,

$$p > \max(\alpha_1, \eta_1), \quad \alpha_1 > \beta$$

De plus, il a été démontré que le temps d'explosion est influencé par la taille (mesure de Lebesgue) du domaine spatial (voir [72], Remarque 2).

D. Ouchenane et al. [65] ont proposé le système suivant d'équations d'ondes non linéaires, intégrant un amortissement non linéaire et des termes sources dans les deux composantes :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta \varphi_t - \operatorname{div}(|\nabla \varphi|^{\alpha_1-2} \nabla \varphi) - \operatorname{div}(|\nabla \varphi_t|^{\beta-2} \nabla \varphi_t) + a_1 |\varphi_t|^{\eta_1-2} \varphi_t = G_1(\varphi, \psi) \\ \psi_{tt} - \Delta \psi_t - \operatorname{div}(|\nabla \psi|^{\alpha_1-2} \nabla \psi) - \operatorname{div}(|\nabla \psi_t|^{\beta'-2} \nabla \psi_t) + a_2 |\varphi_t|^{\omega-2} \varphi_t = G_2(\varphi, \psi) \end{cases} \quad (0.4)$$

Sous des hypothèses appropriées sur les données initiales et des conditions appropriées sur les paramètres $\alpha_1, \beta, \beta', \eta_1, \omega$ ainsi que sur les non-linéarités G_1 et G_2 , les auteurs établissent un résultat global de non-existence (explosion en temps fini). L'approche est inspirée de la méthode développée dans ([4], [5][25]).

L'objectif principal de ce travail est d'établir un résultat global de non-existence pour les solutions du système (0.4) correspondant à de grandes données initiales, et soumis à des conditions aux limites de Dirichlet.

Le système comporte à la fois un amortissement non linéaire et des termes sources de type puissance. Notre objectif principal est d'établir des résultats d'explosion en temps fini sous des hypothèses appropriées sur les exposants et l'énergie initiale, en mettant l'accent sur le délicat équilibre entre l'amortissement et les effets des sources.

Notre approche repose sur la méthode de la concavité, qui permet de construire des inégalités différentielles conduisant à l'explosion des solutions.

Les résultats présentés ici étendent et améliorent ceux de [72], ainsi que d'autres études connexes, en élargissant la classe des non-linéarités admissibles et des structures de couplage.

Ce faisant, ils proposent de nouveaux critères d'explosion plus généraux pour les systèmes d'ondes non linéaires couplés, contribuant ainsi à une meilleure compréhension plus approfondie de leur comportement qualitatif.

A. Choucha et al.[19] proposent le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|_2^2\right) \Delta u + \int_0^t h_1(t-h) \Delta u(h) dh - \Delta u_{tt} + g_1(u_t) \\ \quad = f_1(u, w), \quad z \in \Omega, \quad t > 0, \\ w_{tt} - M\left(\|\nabla w\|_2^2\right) \Delta w + \int_0^t h_2(t-h) \Delta w(h) dh - \Delta w_{tt} + g_2(w_t) \\ \quad = f_2(u, w), \quad z \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(z, t) = w(z, t) = 0 \quad z \in \Gamma_1, \quad t > 0 \\ M\left(\|\nabla u\|_2^2\right) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h_1(t-h) \frac{\partial u(h)}{\partial \nu} dh + \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} = -B \partial_t^{\alpha_1} u, \quad z \in \Gamma_0, \quad t > 0 \\ M\left(\|\nabla w\|_2^2\right) \frac{\partial w}{\partial \nu} - \int_0^t h_2(t-h) \frac{\partial w(h)}{\partial \nu} dh + \frac{\partial w_{tt}}{\partial \nu} = -B \partial_t^{\alpha_1} w, \quad z \in \Gamma_0, \quad t > 0 \\ u(z, 0) = u_0(z), \quad u_t(z, 0) = u_1(z), \quad z \in \Omega, \\ w(z, 0) = w_0(z), \quad w_t(z, 0) = w_1(z), \quad z \in \Omega, \end{array} \right.$$

où

$$g_1(u_t) := \beta_1 |u_t(t)|^{m(z)-2} u_t(t), \quad g_2(w_t) := \beta_1 |w_t(t)|^{m(z)-2} w_t(t)$$

Dans cette étude, ils ont étudié un système quasi-linéaire d'équations viscoélastiques impliquant des conditions aux limites fractionnaires, une dispersion, une source et des exposants variables. Ils ont constaté que la solution du système est universelle et contrainte par des hypothèses correctes sur les fonctions de relaxation et les conditions initiales.

0.3 Notion d'explosion

Les équations hyperboliques peuvent rencontrer des solutions qui n'existent pas globalement. On dit alors qu'elles « explosent » en un temps fini.

Pour une équation d'onde donnée, dans quelles conditions la solution va-t-elle exploser à un instant donné ?

l'énergie initiale est négative ou suffisamment grande, termes sources fortement non linéaires, amortissement insuffisant ou dégénéré, des effets supplémentaires comme la

mémoire viscoélastique ou les termes de retard peuvent, selon leur structure, accélérer le phénomène d'explosion.

0.3.1 Point d'explosion (blow-up)

Dans les équations aux dérivées partielles non linéaires (EDP), le blow-up signifie que la solution devient infinie en un temps fini.

Si $u(x, t)$ une solution d'une EDP définie sur $[0, T[$. S'il existe un temps fini $T > 0$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|u(\cdot, t)\| = +\infty$$

on dit qu'il y a explosion au temps T .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons plusieurs outils fondamentaux qui seront nécessaires tout au long de ce travail. Le point commun à l'ensemble des résultats présentés ici est qu'ils préparent aux résultats principaux, qui seront développés dans les deux chapitres suivants

1.1 Équation de Kirchhoff et autres éléments

1.1.1 Équation de Kirchhoff

L'équation de Kirchhoff, introduite par Gustav Kirchhoff en 1876, constitue une extension de l'équation d'onde classique utilisée pour modéliser les vibrations transversales d'une corde fixée à ses extrémités. Elle généralise l'équation d'onde standard en tenant compte de l'effet de la tension de la corde et de sa géométrie.

Dans un espace unidimensionnel, l'équation de Kirchhoff s'écrit généralement sous la forme :

$$u_{tt} - \left(\rho h \left(P_0 + \frac{2E}{L\rho} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2 dx \right) \right) u_{xx} = 0,$$

où la fonction $u(x, t)$ est le déplacement vertical à la coordonnée spatiale x , variant dans le segment $[0, L]$ et au cours du temps $t > 0$, ρ est la densité de masse, h est l'aire de la section transversale de la corde, P_0 est la tension initiale sur la corde, L est la longueur de la corde, et E est le module de Young du matériau.

Le coefficient non linéaire $\int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2 dx$ est obtenue par la variation de la tension lors de la déformation de la corde. Lorsqu'il n'y a pas de tension initiale (i.e. $P_0 = 0$), cet état est appelé état résolu, par opposition à l'état non résolu.

1.1.2 Viscoélasticité

La viscoélasticité est la propriété des matériaux qui présentent à la fois des comportements visqueux et élastiques lorsqu'ils sont soumis à une déformation.

Les matériaux viscoélastiques sont connus pour présenter un amortissement.

Ces effets d'amortissement sont modélisés à l'aide de deux opérateurs différentiels-intégraux.

Le premier concerne les problèmes viscoélastiques à mémoire finie :

$$\int_0^t h(t - \varrho) \Delta u(\varrho) d\varrho,$$

où $h(t - \varrho)$ est le noyau de mémoire, et $\Delta u(\varrho)$ représente le changement de déplacement au temps ϱ .

Le deuxième type de problèmes est celui des problèmes viscoélastiques à mémoire infinie.

$$\int_0^\infty g(s) \Delta u(t - s) ds,$$

1.1.3 Terme d'amortissement de Balakrishnan

Dans [6] Balakrishnan et Taylor ont proposé un nouveau modèle d'amortissement appelé amortissement Balakrishnan-Taylor $\sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))$ Voir aussi Bass et Zes [9].

Le système est l'équation d'onde bien connue avec $\zeta_1 = \sigma = 0$ et l'équation d'onde de type Kirchhoff avec $\sigma = 0$, qui ont été largement étudiées.

La forme générale de l'équation des ondes viscoélastiques de Balakrishnan-Taylor avec amortissement est la suivante

$$u_{tt} - (a + b \|\nabla u\|^2) \Delta u(t) + \int_0^t h(t - \varrho) \Delta u(\varrho) d\varrho + g(u_t) = f(u).$$

Dans [2] M. Al-Gharabli et al. ont considéré l'équation d'onde viscoélastique de Balakrishnan-Taylor suivante avec un amortissement frictionnel non linéaire et un terme source logarithmique

$$|u_t|^p u_{tt} - M(t) \Delta u(t) + \int_0^t g(t - s) \Delta u(s) ds - \Delta u_{tt}(t) + h(u_t) = k u \ln |u|.$$

Dans [25] A. Choucha et al ont considéré le problème suivant

$$\begin{aligned} & |u_t|^p u_{tt} - M(t) \Delta u(t) - \Delta u_{tt}(t) + \int_0^t g(t - s) \Delta u(s) ds - \mu_1 \Delta u_t(t) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)| \Delta u(x, t - \varrho) d\varrho \\ &= u |u|^{\gamma-2} \ln |u|^k. \end{aligned}$$

1.1.4 Terme de retard

Une forme générale d'équation différentielle à retard simple (ODE) avec un terme de retard peut être écrite comme suit :

$$u_t(t) = f(u(t), u(t - \tau))$$

où

* $u(t)$ est l'état du système à l'instant t .

* τ est le temps de retard.

* $u(t - \tau)$ représente l'état du système au temps passé $t - \tau$

Remarque 1.1. *Selon le retard, on peut distinguer le retard constant où τ est constant, le retard variable dans le temps où $\tau(t)$ dependant du temps t et retard distribué où l'expression de l'équation est donné par le terme*

$$u_t(t) = f(t, \int_0^\tau \mu(s)u(t-s)ds)$$

1.2 Quelques espaces fonctionnels de base

Nous présentons ci-dessous les concepts, définitions et théories nécessaires utilisés dans l'argumentation de cette thèse.

1.2.1 Espace de Banach

1.2.1.1 Espace vectoriel normé

Un espace vectoriel normé X est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) munit d'une norme

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$, et $\|x\| \geq 0$,
2. pour tout $x \in X$ et pour tout λ de $\mathbb{k}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout x, y de X .

Il convient de préciser que la complétude d'un espace vectoriel normé X implique que toutes les suites de Cauchy dans X convergent dans X .

1.2.1.2 Espace de Banach

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

1.2.2 Espace de Hilbert

1.2.2.1 Produit scalaire

Définition 1.1. [31] et [14] On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que

1. pour tout y de E , l'application $\langle \cdot, y \rangle : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;
2. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. pour tout x de $E, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$.
4. pour tout x de $E, \langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Le couple constitué d'un espace vectoriel E et d'un produit scalaire est un espace préhilbertien.

Proposition 1.1. (Inégalité de Schwars) Soit E un espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour tous x, y dans E

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Corollaire 1.1. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur E .

1.2.2.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2. Un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé espace de Hilbert.

Théorème 1.1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans l'espace de Hilbert H , alors elle possède une sous-suite qui converge dans la topologie faible de H .

1.2.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.3. [31] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous définissons l'espace $L^p(\Omega)$ comme suit

Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles f sur Ω telles que f est mesurable et que $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty$

Si $f \in L^p(\Omega)$, on définit la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f qui sont essentiellement bornées sur Ω

Si $f \in L^\infty(\Omega)$, nous avons

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C \geq 0; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Définition 1.4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un nombre non négatif. Nous définissons $C^m(\Omega)$ comme l'espace des fonctions continues sur Ω dont les dérivées partielles $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq m$, existent et sont continues, où

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

1.2.3.1 Dérivée faible

Définition 1.5. [1] Si $f, g \in L^p(\Omega)$, g est considérée comme une dérivée faible d'ordre α de f si

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

1.2.3.2 Espaces de sobolev

Les espaces de Sobolev jouent un rôle fondamental dans le calcul variationnel. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergei Lvovitch Sobolev (1908-1989).

Définition 1.6. [1] Supposons que Ω soit un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p \leq +\infty$, est défini comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

Si $f \in W^{m,p}(\Omega)$, on définit la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = +\infty. \end{cases}$$

Quand $m = 0$, $W^{0,p} = L^p$; quand $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ est désigné par $H^m(\Omega)$ et c'est un espace de Hilbert. La norme de $f \in H^m(\Omega)$ est défini par

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

et le produit scalaire est le suivant

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx.$$

1.2.3.2.1 L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini comme suit

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_i \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \ i = 1, 2, \dots, n, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

Définition 1.8. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est appelé espace de Sobolev d'ordre un, et possède la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

ou fréquemment, si $1 < p < \infty$, avec la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

$W^{1,p}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} uv dx + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Définition 1.9. On définit $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions nulles sur $\Gamma = \partial\Omega$.

Définition 1.10. (Injection continue)

Soit V, W deux espaces vectoriels normés. On dit que V est continûment injecté dans W , et l'on écrira $V \hookrightarrow W$, si V est un sous-espace vectoriel de W et si l'injection canonique

$$\begin{aligned} j &: V \rightarrow W \\ x &\rightarrow j(x) = x, \end{aligned}$$

est continue, c'est-à-dire

$$\exists c > 0 : \|x\|_W \leq c \|x\|_V$$

Exemple 1.2. $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, pour $1 \leq r \leq \frac{2n}{n-2}$

1.2.3.2.2 L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.11. Soit Ω est un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < +\infty$. On définit l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme fermeture de $C_0^1(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

1.3 Quelques inégalités utiles

Nous rappellerons, dans cette section, quelques inégalités qui figureront dans les chapitres suivants.

1.3.1 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.3. [55] Supposons que Ω soit borné dans une direction et que $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe une constante positive $C = C(\Omega, p)$ de sorte que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

où la norme du gradient de u dans $L^p(\Omega)$ est définie par $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx)^{1/p}$,
 $1 \leq p < +\infty$ avec $\nabla u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x))$

1.3.2 Inégalité de Young

Proposition 1.2. [34]

Soient $a, b > 0$ et p, q deux nombres réels conjugués dans $]1, \infty[$ alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \text{pour } q = \frac{p}{p-1}.$$

Proposition 1.3. [34]. (Inégalité de ϵ -Young). Soient $a, b, \epsilon > 0$, $p, q \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q$ avec $C(\epsilon) = \frac{1}{q(\epsilon p)^{\frac{p}{q}}}$

1.3.3 Inégalité de Hölder

Proposition 1.4. [1] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et supposons que $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 < p, q < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.3.4 Formule de Green

Dans [55], on prend Ω comme un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière, alors pour tout u de $H^1(\Omega)$ et v de $H^2(\Omega)$, nous avons

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \zeta ds$$

où ζ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

On remarque que quand u est dans $H_0^1(\Omega)$, alors, la formule de Green se réduit à :

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

1.4 Quelques notions sur les opérateurs

Définition 1.12. *Un opérateur linéaire sur un espace X est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans X , ($D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A)*

Définition 1.13. *Soit H un espace de Hilbert réel et A un opérateur non borné du domaine $D(A) \subset H \longrightarrow H$.*

On dit que A est monotone (ou accréatif) si

$$\forall v \in D(A), \quad \langle Av, v \rangle \geq 0$$

A est dissipatif si

$$\forall v \in D(A), \quad \langle Av, v \rangle \leq 0$$

A est dit maximal monotone si, en plus, $\text{Im}(Id + A) = H$ i.e

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(A), \quad u + Au = f$$

1.4.1 Semi-groupes

Concernant les semi-groupes on a utiliser ce qui est dans [68]

Soit X un espace de Banach. Une famille à un paramètre $(S(t))$, $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si

- (i) $S(0) = Id$ (Id est l'opérateur d'identité sur X).
- (ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tout $s, t \geq 0$.

1.4.2 C_0 -Semi-groupes

Un semi-groupe $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de X à X est appelé semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X,$$

i.e., $S(t)$ est un C_0 -semi-groupe.

1.4.3 Semi-groupe de contraction

Définition 1.14. *Le semi-groupe $S(t)$ est un semi-groupe de contraction s'il existe une constante $0 < \alpha < 1$ telle que pour tout $t > 0$,*

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq \alpha \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Définition 1.15. *L'opérateur linéaire A défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \Big|_{t=0} \text{ pour tout } x \in D(A)$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $S(t)$.

$D(A)$ domaine de A .

Théorème 1.4. *Soit $S(t)$ est un C_0 -semi-groupe ($0 < t < \infty$) alors il existe deux constantes $M > 0$ et $\omega \geq 0$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

1.5 Existence et unicité de la solution

Soit V un espace de Hilbert (réel) avec un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et une norme associée $\|\cdot\|_V$, nous proposons de résoudre le problème suivant :

trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$ on a $a(u, v) = L(v)$.

Nous imposons les conditions suivantes

1) L une application définie sur V dans $\mathbb{R}$ vérifiant

1. L est linéaire.

2. L est continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|L(v)| \leq C\|v\|_V \text{ pour tout } v \in V$$

2) a une application définie sur $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

1. a est bilinéaire.

2. a est continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \text{ pour tous } u, v \in V,$$

3. a est coercive, c'est-à-dire qu'il existe une constante β strictement positive telle que

$$a(u, u) \geq \beta\|u\|^2 \text{ pour tout } u \in V,$$

avec ses conditions, on donne le théorème suivant (voir [14])

1.5.0.1 Théorème de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert (réel), a est continu bilinéaire sur $V \times V$, coercive et L une forme linéaire continue sur V .

Alors, il existe un élément unique u de V , $a(u, v) = L(v)$ pour tout $v \in V$

Si la forme bilinéaire a est symétrique, on pose

$$\forall v \in V, \quad Q(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$$

le théorème est équivalent à un problème de minimisation pour la fonction quadratique Q .

Pour l'existence de solutions, nous utilisons le théorème de Lumer-Phillips ou le théorème de Hille-Yosida.

1.5.0.2 Théorème de Lumer-Phillips

Soit A un opérateur linéaire avec un domaine dense $D(A) \subset X$ dans un espace de Banach X .

A génère un C_0 -semi-groupe de contractions sur X si et seulement si

- (i) Si A est dissipatif
- (ii) il existe λ strictement positif tel que $\lambda I - A$ est surjectif.

Par conséquent, A est dissipatif maximal sur un espace de Hilbert H si et seulement s'il génère un C_0 -semi-groupe de contractions sur H , et donc l'existence de la solution est justifiée par le corollaire suivant, qui découle du théorème de Lumer-Phillips.

Étant donné le problème évolutif suivant

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ sur } [0, \infty[\\ u(0) = u_0 \text{ (donnée initiale)} \end{cases} \quad (1.1)$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $S(t)$ sur un espace de Hilbert H , et $u_0 \in H$ est donné

Proposition 1.5. *Soit H un espace de Hilbert, et soit A un opérateur linéaire défini de $D(A)$ dans H , où $D(A)$ sous ensemble de H .*

Si A est dissipatif maximal, alors le problème de Cauchy (1.1) a une solution unique et faible $u \in C([0, +\infty); H)$, pour chaque donnée initiale $u_0 \in H$. En outre, si $u_0 \in D(A)$, alors $u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A))$.

Corollaire 1.2. *Étant donné le problème évolutif suivant*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f \text{ sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \text{ (donnée initiale)} \end{cases} \quad (1.2)$$

avec les hypothèses de la proposition précédente

où f est continue sur $[0, +\infty[$ et elle prend ses valeurs dans H .

Si A est dissipatif maximal, alors le problème de Cauchy (1.2) a une solution unique et faible $u \in C([0, +\infty); H)$, pour chaque donnée initiale $u_0 \in H$. En outre, si $u_0 \in D(A)$, alors $u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A))$.

Chapitre 2

Existence locale et blow-up pour une équation d'onde viscoélastique non linéaire à retard distribué

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions un problème associé à une équation d'onde viscoélastique non linéaire comportant une source logarithmique non linéaire et des termes de retard distribués. Nous établissons un résultat d'existence locale, ainsi qu'un résultat d'explosion en temps fini pour les solutions correspondant à une énergie initiale négative, sous des hypothèses appropriées.

On s'intéresse à ce qui suit

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s) \Delta u(t-s) ds + \mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| u_t(x, t-s) ds \\ \quad = u |u|^{p-2} \ln |u|^k, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_t(x, -t) = f_0(x, t), \quad u(x, -t) = f_1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \tau_2), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où k, μ_1 sont des constantes positives, $p > 2$ et τ_1, τ_2 sont des délais de temps avec $0 \leq \tau_1 < \tau_2$, μ_2 est une fonction de L^∞ et g est une fonction différentiable, $u |u|^{p-2} \ln |u|^k$ est un terme source non linéaire logarithmique, et selon les hypothèses

(A1) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable et non croissante telle que

$$g(t) \geq 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s) ds = l > 0. \quad (2.2)$$

(A2) Il existe une constante $\xi > 0$ telle que

$$g'(t) \leq -\xi g(t), \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

(A3) $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction L^∞ de sorte que

$$\left(\frac{2\delta + 1}{2} \right) \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds < \mu_1, \quad \delta > \frac{1}{2}. \quad (2.4)$$

Ce type de problème se rencontre dans de nombreuses branches de la physique telles que la physique nucléaire, l'optique et la géophysique. Il est bien connu, en théorie quantique des champs, que ce type de logarithme non linéaire apparaît naturellement dans la cosmologie inflationniste et dans les théories des champs supersymétriques (voir [10],[39]).

Dans [41], les auteurs envisagent le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + u - u \log |u|^2 + u_t + u |u|^2 = 0, \quad x \in \Omega, t \in [0, T] \\ u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Leur travail consiste à étudier l'existence globale de la solution faible.

Cazenave et Haro ont effectué d'autres travaux mathématiques connexes impliquant la limite logarithmique [16]. Ils ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution au problème suivant en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t - u \log |u|^2 = 0, \\ u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous mentionnons également d'autres travaux sur l'équation logarithmique de Schrödinger comme dans ([17],[18],[38]). Dans [44], Kafini et Messaoudi ont étudié l'équation d'onde suivante qui est avec retard et à un terme source non linéaire logarithmique.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = u|u|^{p-2} \ln |u|^k, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), \quad t \in (0, \tau), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ils ont prouvé l'existence locale par le théorème du semi-groupe et ont démontré un résultat d'explosion en temps fini.

D'autre part, les propriétés dynamiques des matériaux viscoélastiques sont d'une grande importance et d'un grand intérêt, car elles apparaissent dans de nombreuses applications en sciences naturelles. De nombreux auteurs se sont intéressés à cette question depuis longtemps, en particulier au cours des deux dernières décennies, et ont fait beaucoup de progrès.

Dans [57] Messaoudi a abordé le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(t-s) \Delta u(s) ds + u_t |u_t|^{m-2} = u|u|^{p-2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $m > 2, p > 2$, Il a prouvé un résultat d'explosion si $p > m$, et un résultat d'existence globale pour $p \leq m$. Ce résultat a été amélioré ultérieurement par [59].

Kafini and Messaoudi, dans [44], ont établi un résultat d'explosion pour le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(t-s)\Delta u(s)ds + u_t = |u|^{p-2}u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.9)$$

où $\int_0^\infty g(s)ds < (2p-4)/(2p-3)$, et avec une énergie négative de sorte que $\int uu_t dx \geq 0$. Sans le terme viscoélastique ($g=0$), Le problème a été largement étudié et des résultats concernant l'existence et la non-existence ont été établis. Dans des domaines bornés, pour l'équation

$$u_{tt} - \Delta u + a|u|^{m-2}u_t = b|u|^{p-2}u, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (2.10)$$

$p > 2, m \geq 2, a, b \geq 0$, pour $a = 0$ le terme source $b|u|^{p-2}u$ provoque l'explosion en temps fini d'une solution avec une énergie initiale négative ([5]).

En revanche, pour $b = 0$, le terme d'amortissement $a|u|^{m-2}u_t$ assure l'existence globale pour des données initiales arbitraires ([42]). Le cas d'un amortissement linéaire ($m=2$) et d'une source non linéaire a été considéré pour la première fois par Levine ([50], [51]). Il a montré que les solutions avec une énergie initiale négative explosaient en temps fini. De plus, l'interaction entre l'amortissement non linéaire ($m > 2$) et les termes sources a été étudiée par Georgiev et Todorova. [35], pour un domaine borné avec des conditions aux limites de Dirichlet. Pour le même problème, Messaoudi [58] a étendu le résultat d'explosion aux solutions avec une énergie initiale négative. Dans [53], les auteurs ont considéré le problème suivant pour une équation d'ondes viscoélastique non linéaire avec amortissement fort, amortissement non linéaire et termes sources.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s)\Delta u(t-s)ds - \varepsilon_1 \Delta u_t + \varepsilon_2 u_t |u_t|^{m-2} = \varepsilon_3 |u|^{p-2}u, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.11)$$

Ils ont prouvé un résultat d'explosion si $p > m$, et établi l'existence globale.

Notre objectif dans ce chapitre est d'étendre les résultats d'explosion actuels aux logarithmes non linéaires pour un problème viscoélastique avec retard distribué.

Notre travail dans ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous prouvons le résultat d'existence locale, et en suite dans la section 3, nous prouvons le résultat d'explosion sous des hypothèses appropriées.

2.2 Existence locale

Comme Nicaise dans [63], nous introduisons la nouvelle variable

$$z(x, \rho, s, t) = u_t(x, t - s\rho)$$

alors nous obtenons

$$\begin{cases} sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0 \\ z(x, 0, s, t) = u_t(x, t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Comme dans [30], nous allons ajouter une nouvelle variable η .

Définissons

$$\eta = \eta^t(s) = u(x, t) - u(x, t - s)$$

par conséquent, nous obtenons

$$\eta_t(s) = -\eta_s(s) + u_t(t). \quad (2.13)$$

Ainsi, le terme de mémoire peut être écrit comme

$$\int_0^\infty g(s) \Delta u(t - s) ds = \int_0^\infty g(s) ds \cdot \Delta u - \int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds. \quad (2.14)$$

Par conséquent, le problème prend la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(1 - \int_0^\infty g(s) ds\right) \Delta u + \mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) ds \\ - \int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds = u |u|^{p-2} \ln |u|^k, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0 \\ \eta_t(x, s) + \eta_s(x, s) = u_t(x, t) \end{cases} \quad (2.15)$$

avec des conditions initiales et aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ z(x, \rho, 0, t) = f_0(x, s\rho), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \\ \eta(x, s) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \eta(0) = \eta(x, 0) = 0 \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(s) = f_1(x, 0) - f_1(x, s) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où

$$(x, \rho, s, t) \in \Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty)$$

Soit $v = u_t$ et désignons par

$$V = (u, v, z, \eta)^T, \quad \text{and} \quad J(V) = (0, u|u|^{p-2} \ln |u|^k, 0, 0)^T$$

Par conséquent, (2.15) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_t(t) = \mathcal{A}V(t) + J(V(t)), \quad t > 0 \\ V(0) = V_0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

où : $V_0 = (u_0, u_1, f_0, \eta_0)^T$ et l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ l\Delta u - \mu_1 v - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) ds + \int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds \\ -\frac{1}{s} z \\ -\eta_s + v \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

nous définissons l'espace d'énergie

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega, (0, 1), (\tau_1, \tau_2)) \times L_g^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}^+)$$

où $L_g^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}^+)$ désigne l'espace de Hilbert de H_0^1 fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, avec le produit scalaire :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_g^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}^+)} = \int_\Omega \int_0^\infty g(s) \nabla \varphi(s) \nabla \psi(s) ds dx$$

$\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle V, \bar{V} \rangle_{\mathcal{H}} &= l \int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} v \bar{v} dx + \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) \nabla \bar{\eta}(s) ds dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z \bar{z} ds d\rho dx \end{aligned}$$

pour tout $V = (u, v, z, \eta)^T, \bar{V} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{z}, \bar{\eta})^T$.

Le domaine de $\mathcal{A}$ est

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left(\begin{array}{l} (u, v, z, \eta)^T \in \mathcal{H} \quad / \quad u \in H^2(\Omega), v \in H_0^2(\Omega), z(x, 1, s, t) \in L^2(\Omega) \\ z, z_{\rho} \in L^2(\Omega, (0, 1), (\tau_1, \tau_2)), \quad z(x, 0, s, t) = v \\ \eta \in L_g^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}^+) \cap H_0^2(\Omega), \eta_s \in L_g^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}^+), \eta(x, 0) = 0 \end{array} \right). \quad (2.19)$$

Avant d'établir le résultat d'existence locale, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 2.1. [43] *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A > 0$, tel que la fonction réelle :*

$$j(s) = |s|^{p-2} \ln |s|, \quad p > 2$$

satisfait

$$|j(s)| \leq A + |s|^{p-2+\varepsilon}$$

Démonstration. Puisque $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\ln |s|}{|s|^{\varepsilon}} = 0$, quand $|z| \rightarrow +\infty$ alors il existe $B > 0$, tel que :

$$\frac{\ln |s|}{|s|^{\varepsilon}} < 1, \quad \forall |s| > B$$

Donc

$$|j(s)| \leq |s|^{p-2+\varepsilon}$$

puisque $p > 2$, alors, pour un certain $A > 0$, et pour tout $|s| < B$

on aura

$$|j(s)| \leq A + |s|^{p-2+\varepsilon}$$

alors, nous avons le résultat d'existence locale suivant □

Théorème 2.1. *Supposons que (2.2), (2.3) et (2.4), et*

$$\begin{cases} 2 < p < \frac{2(n-1)}{n-2}, & n \geq 3 \\ p > 2, & n = 1, 2 \end{cases} \quad (2.20)$$

alors pour tout $V_0 \in \mathcal{H}$, le problème (2.17) admet une solution faible unique $V \in C([0, T], \mathcal{H})$

Démonstration. Nous démontrerons que $\mathcal{A}$ est un opérateur dissipatif maximal sur $\mathcal{H}$ et J est une fonction localement lipschitzienne sur $\mathcal{H}$.

Tout d'abord, pour tout $V \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(V), V \rangle_{\mathcal{H}} &= l \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \\ &\int_{\Omega} v \left[l \Delta u - \mu_1 v - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) ds + \int_0^{\infty} g(s) \Delta \eta(s) ds \right] dx \\ &+ \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) \nabla (-\eta_s + v)(s) ds dx + \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z \left(\frac{-1}{s} z_{\rho} \right) ds dp dx, \end{aligned} \quad (2.21)$$

en utilisant (2.12), et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(V), V \rangle_{\mathcal{H}} &= -\mu_1 \int_{\Omega} v^2 dx - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| v z(x, 1, s, t) ds dx \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \int_{\Omega} v^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} g'^2(s) ds dx \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Young, (2.3) and (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(V), V \rangle_{\mathcal{H}} &= - \left(\mu_1 - \left(\delta + \frac{1}{2} \right) \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \int_{\Omega} v^2 dx \\ &- \left(\frac{2\delta - 1}{4\delta} \right) \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \\ &- \frac{\xi}{2} \int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta^2(s) ds dx \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

cela signifie que $\mathcal{A}$ est dissipatif.

Pour montrer que $\mathcal{A}$ est maximal, nous prouvons que chaque

$$F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$$

il existe $V = (u, v, z, \eta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, de sorte que $(I - \mathcal{A})V = F$

$$\begin{cases} u - v = f_1 \\ v - l\Delta u + \mu_1 v + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) ds - \int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds = f_2 \\ z + \frac{1}{s} z_\rho = f_3 \\ \eta + \eta_s - v = f_4 \end{cases} \quad (2.23)$$

En remarquant que $v = u - f_1$, nous avons déduit de (2.23)₃

$$z(x, \rho, s) = (u - f_1) e^{-\rho s} + s e^{-\rho s} \int_0^\rho f_3(x, \gamma, s) e^{s\gamma} d\gamma$$

et en particulier

$$z(x, 1, s) = u(x) e^{-s} + z_0(x, s) \quad (2.24)$$

où

$$z_0(x, s) = -f_1(x) e^{-s} + s e^{-s} \int_0^1 f_3(x, \gamma, s) e^{s\gamma} d\gamma$$

avec

$$z_0 \in L^2(\Omega, (\tau_1, \tau_2))$$

et nous notons que la dernière équation du système (2.23) avec $\eta(x, 0) = 0$, a une solution unique

$$\begin{aligned} \eta(x, s) &= \left[\int_0^s e^y (f_4(x, y) + v(x)) dy \right] e^{-s} \\ &= \left[\int_0^s e^y (f_4(x, y) + u(x) - f_1(x)) dy \right] e^{-s} \\ &= u(x) e^{-s} \int_0^s e^y dy + \left[\int_0^s e^y (f_4(x, y) - f_1(x)) dy \right] e^{-s} \\ &= u(x) e^{-s} \int_0^s e^y dy + \eta_0(x, s) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où

$$\eta_0(x, s) = e^{-s} \left[\int_0^s e^y (f_4(x, y) - f_1(x)) dy \right]$$

avec

$$\eta_0 \in L^2(\Omega, (\tau_1, \tau_2))$$

En substituant (2.24) et (2.25) dans (2.23)₂, on obtient

$$\Gamma u - m\Delta u = G$$

où

$$\begin{cases} \Gamma = 1 + \mu_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| e^{-s} ds \\ m = l + \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s}) ds \\ G = f_2 = f_2 + (1 + \mu_1)f_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z_0 ds + \int_0^\infty g(s) \Delta \eta_0 ds \end{cases} \quad (2.26)$$

Maintenant, nous définissons sur $H_0^1(\Omega)$, la forme bilinéaire B et la forme linéaire L

$$B(u, \phi) = \Gamma \int_{\Omega} u \phi + m \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \quad , \quad L(\phi) = G \phi$$

Il est facile de vérifier que B est continue et coercive et que L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Par conséquent, le théorème de Lax-Milgram implique que l'équation

$$B(u, \phi) = L(\phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.27)$$

a une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi $v = u - f_1 \in H_0^1(\Omega)$.

En conséquence, d'après (2.24) et (2.25), nous avons

$$z, z_\rho \in L^2(\Omega, (0, 1), (\tau_1, \tau_2)), \eta \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)), \eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$$

En utilisant (2.27), nous obtenons

$$\Gamma \int_{\Omega} u \phi + m \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} G \phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

La théorie de la régularité elliptique, donc, implique que $u \in H_0^1(\Omega)$ et, de plus, la formule de Green et (2.23)₂ donne

$$\int_{\Omega} \left[(1 + \mu_1)v - l\Delta u + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) ds - \int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds - f_2 \right] \phi = 0, \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

Ainsi

$$(1 + \mu_1)v - l\Delta u + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) ds - \int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds = f_2 \in L^2(\Omega)$$

Donc,

$$V = (u, v, z, \eta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

En conséquence, $I - \mathcal{A}$ est surjective et alors $\mathcal{A}$ est maximal.

Pour terminer, nous montrons que $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est localement lipschitzienne [43].

Si nous posons

$$F(s) = |s|^{p-2} s \ln |s|^k$$

alors

$$F'(s) = k[1 + (p-1) \ln |s|] |s|^{p-2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|J(V) - J(\bar{V})\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(0, u|u|^{p-2} \ln |u|^k - \bar{u}|\bar{u}|^{p-2} \ln |\bar{u}|^k, 0, 0)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|u|u|^{p-2} \ln |u|^k - \bar{u}|\bar{u}|^{p-2} \ln |\bar{u}|^k\|_L^2 \\ &= \|F(u) - F(\bar{u})\|_L^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

En conséquence du théorème des accroissements finis, nous avons, pour $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\begin{aligned} |F(u) - F(\bar{u})| &= |F'(\theta u + (1-\theta)\bar{u})(u - \bar{u})| \\ &\leq k[1 + (p-1) \ln |\theta u + (1-\theta)\bar{u}|] |\theta u + (1-\theta)\bar{u}|^{p-2} |u - \bar{u}| \\ &\leq k|\theta u + (1-\theta)\bar{u}|^{p-2} |u - \bar{u}| + k(p-1) |j(\theta u + (1-\theta)\bar{u})| |u - \bar{u}|. \end{aligned}$$

En rappelant le lemme 3.1, on aura

$$\begin{aligned} |F(u) - F(\bar{u})| &= k|\theta u + (1-\theta)\bar{u}|^{p-2} |u - \bar{u}| + k(p-1) A |u - \bar{u}| \\ &\quad + k(p-1) |\theta u + (1-\theta)\bar{u}|^{p-2+\varepsilon} |u - \bar{u}| \\ &\leq k(|u| + |\bar{u}|)^{p-2} |u - \bar{u}| + k(p-1) A |u - \bar{u}| \\ &\quad + k(p-1) (|u| + |\bar{u}|)^{p-2+\varepsilon} |u - \bar{u}|. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Donc $u, \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$, nous utilisons ensuite l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad 1 \leq r \leq \frac{2n}{n-2}.$$

Afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} [(|u| + |\bar{u}|)^{p-2} |u - \bar{u}|]^2 dx &= \int_{\Omega} [(|u| + |\bar{u}|)^{2(p-2)} |u - \bar{u}|^2] dx \\
 &\leq C \left(\int_{\Omega} (|u| + |\bar{u}|)^{2(p-2)} dx \right)^{(p-2)/(p-1)} \\
 &\quad \times \left(\int_{\Omega} (|u - \bar{u}|)^{2(p-2)} dx \right)^{1/(p-1)} \\
 &\leq C [\|u\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}^{2(p-1)} + \|\bar{u}\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}^{2(p-1)}]^{(p-2)/(p-1)} \\
 &\quad \times \|u - \bar{u}\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}^2 \\
 &\leq C [\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)} + \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)}]^{(p-2)/(p-1)} \\
 &\quad \times \|u - \bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

De même, nous estimons

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} [(|u| + |\bar{u}|)^{p-2+\varepsilon} |u - \bar{u}|]^2 dx &= \int_{\Omega} [(|u| + |\bar{u}|)^{2(p-2+\varepsilon)} |u - \bar{u}|^2] dx \\
 &\leq C \left(\int_{\Omega} (|u| + |\bar{u}|)^{2(p-2+\varepsilon)(p-1)/(p-2)} dx \right)^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \\
 &\quad \times \left(\int_{\Omega} (|u - \bar{u}|)^{2(p-2)} dx \right)^{1/(p-1)} \\
 &\leq C \left(\int_{\Omega} (|u| + |\bar{u}|)^{2(p-1)+2\varepsilon(p-1)/(p-2)} dx \right)^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \\
 &\quad \times \|u - \bar{u}\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}^2 \\
 &\quad . \tag{2.31}
 \end{aligned}$$

Étant donné que $p < (n-1)/(n-2)$. Nous pouvons choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$p^* = 2(p-2) + \frac{2\varepsilon(p-1)}{(p-2)} \leq \frac{2n}{n-2}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} [(|u| + |\bar{u}|)^{p-2+\varepsilon} |u - \bar{u}|]^2 dx &= C [\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} + \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*}]^{(p-2)/(p-1)} \\
 &\quad \times \|u - \bar{u}\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}^2 \\
 &\leq C [\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^*} + \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^*}]^{(p-2)/(p-1)} \\
 &\quad \times \|u - \bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

Donc, en combinant (2.28)-(2.32), il résulte que

$$\begin{aligned}
 \|J(V) - J(\bar{V})\|_{\mathcal{H}}^2 &= [k^2(p-1)^2 A^2] \|u - \bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
 &\quad + C[(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)} + \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)})^{(p-2)/(p-1)} \\
 &\quad + (\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^*} + \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^*})^{(p-2)/(p-1)}] \|u - \bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
 &\leq C(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}) \|u - \bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Par conséquent, J est localement Lipschitzienne Grâce à ([47], [68]), on a ainsi terminé la démonstration. $\square$

2.3 Explosion

Nous introduisons la fonctionnelle d'énergie

Lemme 2.2. *On suppose (2.2)-(2.4), et (2.20).*

Admettons que $u(t)$ est une fonction qui résout (2.15), alors la fonctionnelle d'énergie $E(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^\infty g(s) ds\right) \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|_g^2 + \frac{k}{p^2} \|u\|_p^p \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Elle est décroissante et sa dérivée vérifie

$$E'(t) \leq -c_1 \left(\|u_t\|_2^2 + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx + \|\eta\|_g^2 \right) \tag{2.35}$$

Démonstration. En multipliant l'équation (2.15)₁ par u_t et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^\infty g(s) ds\right) \frac{d}{dt} \|\nabla u_t\|_2^2 + \mu_1 \|u_t\|_2^2 \\
 &\quad + \int_\Omega u_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) ds dx + \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \nabla \eta \cdot \nabla u_t dx ds \\
 &= \int_\Omega u_t u |u|^{p-2} \ln |u|^k dx.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

En utilisant (2.13) et (2.3), nous avons

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \nabla \eta \cdot \nabla u_t dx ds &= \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \nabla \eta(s) \cdot (\nabla \eta_t + \nabla \eta_s) dx ds \\
 &= \int_0^\infty g(s) \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \eta\|_2^2 ds + \int_0^\infty g(s) \int_\Omega d\left(\frac{1}{2} \|\nabla \eta\|_2^2\right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \eta\|_g^2 - \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\nabla \eta\|_2^2 ds.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

où

$$\|\eta\|_g^2 = \int_0^\infty g(s) \cdot \|\nabla \eta(s)\|_2^2 ds$$

et, nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx &= -\frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2 |\mu_2(s)| z z_\rho ds d\rho dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \left[z^2(x, 1, s, t) - z^2(x, 0, s, t) \right] ds dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \|u_t\|_2^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} E(t) &= -\mu_1 \|u_t\|_2^2 - \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| u_t z(x, 1, s, t) ds dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\nabla \eta\|_2^2 ds + \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \|u_t\|_2^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

En (2.36), (2.37), et (2.38), on obtient (2.34).

Et en utilisant l'inégalité de Young, (2.2), (2.3) et (2.4) dans (2.39), on obtient (2.35). $\square$

Nous donnons maintenant quelques lemmes essentiels pour le théorème d'explosion.

Lemme 2.3. [43] *Il existe une constante strictement positive c dépendant uniquement de Ω , telle que*

$$\left(\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{s/p} \leq c \left[\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx + \|\nabla u\|_2^2 \right], \tag{2.40}$$

pour tout $u \in L^{p+1}(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p$, à condition que $\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \geq 0$.

Démonstration. Si $\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx > 1$, alors

$$\left(\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{s/p} \leq c \left[\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx + \|\nabla u\|_2^2 \right]. \quad (2.41)$$

Si $0 < \int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \leq 1$, alors nous posons

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega, |u| > 1\}$$

et, pour tout $\beta \leq 2$, nous avons

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{s/p} &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{\beta/p} \leq \left(\int_{\Omega_1} |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{\beta/p} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \right)^{\beta/p} \leq \left(\int_{\Omega_1} |u|^{p+1} dx \right)^{\beta/p} = \|u\|_{p+1}^{\beta(p+1)/p}. \end{aligned}$$

Nous choisissons $\beta = 2p/(p+1) < 2$ pour obtenir

$$\left(\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{s/p} \leq \|u\|_{p+1}^2 \leq c \|\nabla u\|_2^2. \quad (2.42)$$

Combinant (2.41) et (2.42), on obtient (2.40). $\square$

Lemme 2.4. *Il existe une constante positive $c > 0$, dépendant uniquement de Ω , telle que*

$$\|u\|_p^p \leq c \left[\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx + \|\nabla u\|_2^2 \right] \quad (2.43)$$

pour tout $u \in L^p(\Omega)$, pourvu que $\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \geq 0$.

Démonstration. Nous posons

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega, |u| > e\}$$

$$\Omega_- = \{x \in \Omega, |u| \leq e\}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
 \|u\|_p^p &= \int_{\Omega_+} |u|^p dx + \int_{\Omega_-} |u|^p dx \\
 &\leq \int_{\Omega_+} |u|^p \ln |u|^k dx + \int_{\Omega_-} e^p \left| \frac{u}{e} \right|^p dx \\
 &\leq \int_{\Omega_+} |u|^p \ln |u|^k dx + e^p \int_{\Omega_-} \left| \frac{u}{e} \right|^p dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx + e^p \int_{\Omega} \left| \frac{u}{e} \right|^p dx \\
 &\leq c \left[\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx + \|\nabla u\|_2^2 \right].
 \end{aligned}$$

Sachant que $\|u\|_2^2 \leq c\|u\|_p^2 \leq c(\|u\|_p^p)^{2/p}$, nous avons :

□

Corollaire 2.1. *Il existe une constante positive $c > 0$, dépendant uniquement de Ω , telle que*

$$\|u\|_2^2 \leq c \left[\left(\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{2/p} + \|\nabla u\|_2^{4/p} \right]. \quad (2.44)$$

à condition que $\int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \geq 0$.

Lemme 2.5. *Il existe une constante positive $c > 0$, dépendant uniquement de Ω , telle que*

$$\|u\|_p^s \leq c \left[\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_2^2 \right]. \quad (2.45)$$

pour tout $u \in L^{p+1}(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p$.

Démonstration. Si $\|u\|_p \geq 1$ alors

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^p$$

Si $\|u\|_p \leq 1$ alors $\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2$. En utilisant les théorèmes d'injection de Sobolev, nous avons :

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2 \leq c\|\nabla u\|_2^2.$$

□

Désormais, nous sommes prêts à énoncer et démontrer notre résultat principal. Pour cela, nous définissons

$$\begin{aligned} H(t) = -E(t) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx - \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 - \frac{k}{p^2} \|u\|_p^p \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^\infty g(s) ds\right) \|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\eta\|_g^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Théorème 2.2. *Supposons que (2.2)-(2.4), et (2.20) soient vérifiées. Supposons de plus que $E(0) < 0$, donc la solution du problème (2.15) explose en temps fini.*

Démonstration. À partir de (2.34), Nous avons

$$E(t) \leq E(0) \leq 0. \quad (2.47)$$

Donc

$$\begin{aligned} H'(t) &= -E'(t) \geq c_1 \left[\|u_t\|_2^2 + \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx + \|\eta\|_g^2 \right] \\ &\geq c_1 \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \geq 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

et

$$0 \leq H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx. \quad (2.49)$$

On pose

$$\mathcal{K}(t) = H^{1-\alpha} + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx + \frac{\varepsilon \mu_1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx. \quad (2.50)$$

où ε est strictement positif qui sera précisé par la suite et

$$\frac{2(p-2)}{p^2} < \alpha < \frac{p-2}{2p} < 1. \quad (2.51)$$

En multipliant (2.15)₁ par u et en prenant la dérivée de (2.50), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(t) &= (1-\alpha) H^{-\alpha} H'(t) + \varepsilon \|u_t\|_2^2 - \varepsilon \left(1 - \int_0^\infty g(s) ds\right) \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad - \varepsilon \int_0^\infty g(s) ds \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla u dx ds + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| u z(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned} \quad (2.52)$$

En utilisant

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| u z(x, 1, s, t) ds dx &\leq \varepsilon \left\{ \delta_1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \|u\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\delta_1} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \right\}. \end{aligned}$$

et

$$\varepsilon \int_0^\infty g(s) ds \int_{\Omega} \nabla \eta(s) \cdot \nabla u dx ds \leq \varepsilon \left\{ \delta_2 \|\eta\|_g^2 + \frac{1}{4\delta_2} \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) \cdot \|\nabla u\|_2^2 \right\}. \quad (2.53)$$

nous obtenons, à partir de (2.52),

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(t) &\geq (1 - \alpha) H^{-\alpha} H'(t) + \varepsilon \|u_t\|_2^2 - \varepsilon \left(1 - \int_0^\infty g(s) ds \right) \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad - \varepsilon \delta_2 \|\eta\|_g^2 - \frac{\varepsilon}{4\delta_2} \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) \cdot \|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx \\ &\quad - \varepsilon \delta_1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \|u\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{4\delta_1} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Par conséquent, en utilisant (2.48) et en posant δ_1 de sorte que $\frac{1}{4\delta_1 c_1} = \kappa H^{-\alpha}(t)$, en substituant dans (2.54), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(t) &\geq [(1 - \alpha) - \varepsilon \kappa] H'(t) + \varepsilon \|u_t\|_2^2 - \varepsilon \delta_2 \|\eta\|_g^2 \\ &\quad - \varepsilon \left[\left(1 - \int_0^\infty g(s) ds \right) + \frac{1}{4\delta_2} \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) \right] \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx - \varepsilon \frac{H^\alpha(t)}{4c_1 \kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \|u\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

Pour $0 < a < 1$, à partir de (2.46)

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx &= \varepsilon p(1 - a) H(t) + \frac{\varepsilon p(1 - a)}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{\varepsilon(1 - a)k}{p} \|u\|_p^p \\ &\quad + \frac{\varepsilon p(1 - a)}{2} \left(1 - \int_0^\infty g(s) ds \right) \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{\varepsilon p(1 - a)}{2} \|\eta\|_g^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon p(1 - a)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx \\ &\quad + \varepsilon a \int_{\Omega} |u|^p \ln |u|^k dx. \end{aligned} \quad (2.56)$$

en substituant dans (2.55), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}'(t) &\geq [(1-\alpha) - \varepsilon\kappa] H^{-\alpha} H'(t) + \varepsilon \left[\frac{p(1-a)}{2} + 1 \right] \|u_t\|_2^2 \\
 &+ \varepsilon \left[\left(\frac{p(1-a)}{2} - 1 \right) \left(1 - \int_0^\infty g(s) ds \right) - \frac{1}{4\delta_2} \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) \right] \|\nabla u\|_2^2 \\
 &+ a\varepsilon \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx - \varepsilon \frac{H^\alpha(t)}{4c_1\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \|u\|_2^2 \\
 &+ \varepsilon \left[\frac{p(1-a)}{2} - \delta_2 \right] \|\eta\|_g^2 + \varepsilon p(1-a) H(t) + \frac{\varepsilon(1-a)k}{p} \|u\|_p^p \\
 &+ \frac{\varepsilon p(1-a)}{2} \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

En utilisant (2.44), (2.49) et l'inégalité de Young, nous trouvons.

$$\begin{aligned}
 H^\alpha(t) \|u\|_2^2 &\leq \left(\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \right)^\alpha \|u\|_2^2 \\
 &\leq c \left\{ \left(\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{\alpha+2/p} + \left(\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \right)^\alpha \|\nabla u\|_{4/p}^2 \right\} \\
 &\leq c \left\{ \left(\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{(p\alpha+2)/p} + \|\nabla u\|_2^2 + \left(\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \right)^{\frac{p\alpha}{(p-2)}} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

En exploitant (2.51), nous avons

$$2 < p\alpha + 2 \leq p, \quad \text{et} \quad 2 < \frac{\alpha p^2}{p-2} \leq p.$$

Ainsi, le lemme 3.2 donne

$$H^\alpha(t) \|u\|_2^2 \leq c \left\{ \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx + \|\nabla u\|_2^2 \right\}. \tag{2.59}$$

En combinant (2.57) et (2.59), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(t) &\geq [(1-\alpha) - \varepsilon\kappa] H^{-\alpha} H'(t) + \varepsilon \left[\frac{p(1-a)}{2} + 1 \right] \|u_t\|_2^2 \\
 &+ \varepsilon \left\{ \left(\frac{p(1-a)}{2} - 1 \right) - \left(\frac{p(1-a)}{2} - 1 + \frac{1}{4\delta_2} \right) \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{c}{4c_1\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \right\} \|\nabla u\|_2^2 \\
 &+ \varepsilon \left[a - \frac{c}{4c_1\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \right] \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \\
 &+ \varepsilon \left[\frac{p(1-a)}{2} - \delta_2 \right] \|\eta\|_g^2 + \varepsilon p(1-a) H(t) + \frac{\varepsilon(1-a)k}{p} \|u\|_p^p \\
 &+ \frac{\varepsilon p(1-a)}{2} \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

À ce stade, nous choisissons $a > 0$ suffisamment petit pour que

$$\alpha_1 = \frac{p(1-a)}{2} - 1 > 0$$

En posant $\delta_2 = \frac{p(1-a)}{4}$, en posant

$$\int_0^\infty g(s) ds < \frac{\frac{p(1-a)}{2} - 1}{\left(\frac{p(1-a)}{2} - 1 \right) + \frac{1}{p(1-a)}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)}}$$

alors nous choisissons κ suffisamment grand pour que

$$\alpha_2 = \left(\frac{p(1-a)}{2} - 1 \right) - \left(\frac{p(1-a)}{2} - 1 + \frac{1}{4\delta_2} \right) \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) - \frac{c}{4c_1\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) > 0$$

et

$$\alpha_3 = a - \frac{c}{4c_1\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) > 0$$

Une fois κ et a fixés, nous choisissons ε suffisamment petit pour que

$$\alpha_4 = (1-\alpha) - \varepsilon\kappa > 0.$$

Ainsi, pour un certain $\beta > 0$, l'estimation (2.60) devient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}'(t) &\geq \beta \{ H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx + \|\eta\|_g^2 + \|u\|_p^p \\
 &+ \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx \}.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

et

$$\mathcal{K}(t) \geq \mathcal{K}(0) > 0, \quad t > 0. \quad (2.62)$$

Ensuite, en utilisant les inégalités de Hölder et de Young, nous avons

$$\|u\|_2 = \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left[\left(\int_{\Omega} (|u|^2)^{p/2} dx \right)^{\frac{2}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq c \|u\|_p. \quad (2.63)$$

et

$$\left| \int_{\Omega} u^2 dx \right| \leq \|u\|_2 \cdot \|u_t\|_2 \leq c \|u\|_p \cdot \|u_t\|_2$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u^2 dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq c \|u\|_p^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq c \left[\|u\|_p^{\frac{\mu}{1-\alpha}} + \|u_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\alpha}} \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

où $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$.

nous prenons $\theta = 2(1-\alpha)$, pour obtenir

$$\frac{\mu}{1-\alpha} = \frac{2}{1-2\alpha} \leq p$$

Par conséquent, pour $s = 2/(1-2\alpha)$, nous obtenons

$$\left| \int_{\Omega} u^2 dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c [\|u\|_p^s + \|u_t\|_2^2].$$

par conséquent, le lemme 3.3 donne

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u^2 dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\leq c \left[\|\nabla u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p \right] \\ &\leq c \left[\|\nabla u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p + \|\eta\|_g^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) &= \left(H^{1-\alpha} + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx + \frac{\varepsilon \mu_1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq c \left[H(t) + \left| \int_{\Omega} u^2 dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} + \|u\|_2^{\frac{2}{1-\alpha}} \right] \\ &\leq c \left[H(t) + \|\nabla u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_p^p + \|\eta\|_g^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Selon (2.61) et (2.66), nous obtenons

$$\mathcal{K}'(t) \geq \lambda \mathcal{K}^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \quad (2.67)$$

où $\lambda > 0$, une simple intégration de (2.67), nous obtenons

$$\mathcal{K}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \geq \frac{1}{\mathcal{K}^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0) - \lambda \frac{\alpha}{(1-\alpha)} t}.$$

Par conséquent, $K(t)$ explose en temps

$$T \leq T^* = \frac{1-\alpha}{\lambda \alpha \mathcal{K}^{\alpha/(1-\alpha)}(0)}$$

Cela complète la preuve. □

Chapitre 3

Explosion de la solution d'un système viscoelastique avec une non-linéarité logarithmique de type kirchhoff

3.1 Introduction

Ce chapitre contient le contenu de la publication [\[60\]](#) , nous considérons le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t|^p u_{tt} - M(t) \Delta u(t) + \int_0^t h(t-\varrho) \Delta u(\varrho) d\varrho - \Delta u_{tt}(t) \\ + \beta_1 |u_t(t)|^{m-2} u_t(t) + \beta_2 |u_t(t-\tau)|^{m-2} u_t(t-\tau) = u |u|^{\gamma-2} \ln |u|^k. \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \text{in } \Omega \\ u_t(x, t-\tau) = f_0(x, t-\tau), \quad \text{in } \Omega \times (0, \tau) \\ u(x, t) = 0, \quad \text{in } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où

$$M(t) := \left(\zeta_0 + \zeta_1 \|\nabla u\|_2^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))_{L^2(\Omega)} \right),$$

et $\Omega \in \mathbb{R}^N$ est un domaine borné à frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$. $\gamma \geq 2$, $\zeta_0, \zeta_1, \sigma, \beta_1, k$ sont des constantes positives, β_2 est un nombre réel. $p \geq 0$ pour $N = 1, 2$, et $0 \leq p \leq \frac{4}{N-2}$ pour $N \geq 3$, et $m \geq 2$ pour $N = 1, 2$, et $2 < m \leq \frac{N+2}{N-2}$ pour $N \geq 3$, h est une fonction positive.

Physiquement, la relation entre l'évolution de la contrainte et de la déformation dans un faisceau, inspirée de la théorie de Boltzmann, est appelée terme d'amortissement visqueux., où le noyau du terme de mémoire est la fonction h .

Voir ([11],[21],[22],[25],[26],[29],[32],[36],[56]).

Dans [6], Balakrishnan et Taylor ont proposé un nouveau modèle d'amortissement qu'ils ont appelé l'amortissement de Balakrishnan-Taylor, car il est lié à l'équation d'extension et de plaque. Pour un examen plus approfondi, voici quelques articles qui se sont concentrés sur l'étude de cet amortissement.([2],[6],[9] [13],[25],[33],[36],[54],[62]).

L'effet de retard est souvent observé dans de nombreuses applications et questions pratiques et transforme de nombreux systèmes en différentes questions méritant d'être étudiées.

Récemment, la stabilité et le comportement asymptotique des systèmes évolutifs à retard temporel ont été étudiés par de nombreux auteurs. Voir ([12],[21]-[26],[32],[36],[64]).

L'importance considérable des logarithmes non linéaires en physique réside dans leur apparition dans de nombreuses questions et théories, notamment la symétrie, la

cosmologie, la mécanique quantique, ainsi que la physique nucléaire.

Ils sont également utilisés dans de nombreuses applications telles que l'optique, le nucléaire et même la géophysique.

De nombreux chercheurs ont abordé ce type de problème dans plusieurs contextes différents, où l'existence globale de solutions, la stabilité et l'explosion de solutions ont été étudiées.

Pour plus d'informations, les lecteurs peuvent se référer à ([7],[8],[10],[13],[25],[28],[37],[40],[43]).

En se basant sur tout ce qui précède, en combinant ces termes d'amortissement (terme de mémoire, amortissement de Balakrishnan-Taylor, amortissement logarithmique, non-linéarité, parcimonie et termes de retard) dans un problème spécifique avec l'ajout du terme de retard ($\beta_2 |u_t(t - \tau)|^{m-2} u_t(t - \tau)$) nous pensons que cela constitue un nouveau problème digne d'étude et de recherche, différent de ceux mentionnés ci-dessus et sur lequel nous allons tenter de faire la lumière.

Notre travail est divisé en plusieurs sections : dans la section suivante, nous établissons les hypothèses, les concepts et les règles logiques dont nous avons besoin. Dans la section 3, nous énonçons et prouvons l'explosion des solutions.

Pour étudier notre problème, nous aurons besoin de certains éléments dans cette section.

Tout d'abord, émettez les hypothèses suivantes pour β_2 et h :

(A1) $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe C^1 non croissante satisfaisant :

$$h(t) > 0, \quad \zeta_0 - \int_0^\infty h(\varrho) d\varrho = l > 0. \quad (3.2)$$

(A2)

$$|\beta_2| < \beta_1. \quad (3.3)$$

Introduisons

$$(h \circ \psi)(t) := \int_{\Omega} \int_0^t h(t - \varrho) |\psi(t) - \psi(\varrho)|^2 d\varrho dx.$$

Comme dans [64], avec les nouvelles variables suivantes

$$y(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau\rho), \quad (x, \rho, t) \in \Omega \times (0, 1) \times R_+,$$

qui vérifient

$$\begin{cases} \tau y_t(x, \rho, t) + y_{\rho}(x, \rho, t) = 0, \\ y(x, 0, t) = u_t(x, t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Donc, le problème (3.1) peut s'écrire comme

$$\begin{cases} |u_t|^p u_{tt} - M(t) \Delta u(t) + \int_0^t h(t - \varrho) \Delta u(\varrho) d\varrho - \Delta u_{tt}(t) \\ \quad + \beta_1 |u_t(t)|^{m-2} u_t(t) + \beta_2 |y(x, 1, t)|^{m-2} y(x, 1, t) = u |u|^{\gamma-2} \ln |u|^k. \\ \tau y_t(x, \rho, t) + y_{\rho}(x, \rho, t) = 0. \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \text{in } \Omega \\ y(x, \rho, 0) = f_0(x, -\tau\rho), \quad \text{in } \Omega \times (0, 1) \\ u(x, t) = 0, \quad \text{in } \partial\Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.5)$$

avec

$$(x, \rho, t) \in \Omega \times (0, 1) \times (0, \infty).$$

Nous donnons maintenant la fonction d'énergie.

Lemme 3.1. *La fonction d'énergie E définie par*

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{p+2} \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \frac{1}{2} \left(\zeta_0 - \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \frac{\zeta_1}{4} \|\nabla u(t)\|_2^4 + \frac{1}{2} (h \circ \nabla u)(t) + \frac{k}{\gamma^2} \|u(t)\|_{\gamma}^{\gamma} \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} |u|^{\gamma} \ln |u|^k dx + \frac{\xi}{m} \int_0^1 \|y(x, \rho, t)\|_m^m d\rho, \end{aligned} \quad (3.6)$$

satisfait

$$\begin{aligned} E'(t) \leq & -C_0 (\|u_t(t)\|_m^m + \|y(x, 1, t)\|_m^m) + \frac{1}{2}(h' \circ \nabla u)(t) \\ & - \frac{1}{2}h(t)\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{\sigma}{4} \left[\frac{d}{dt} (\|\nabla u(t)\|_2^2) \right]^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

où ξ est strictement positif et satisfait

$$\tau(m-1)|\beta_2| \leq \xi \leq \tau(m\beta_1 - |\beta_2|).$$

Démonstration. En prenant le produit scalaire de (3.5)₁ avec u_t , puis en intégrant sur Ω , on trouve

$$\begin{aligned} & (|u_t|^p u_{tt}(t), u_t(t))_{L^2(\Omega)} - (M(t)\Delta u(t), u_t(t))_{L^2(\Omega)} - (\Delta u_{tt}(t), u_t(t))_{L^2(\Omega)} \\ & + \left(\int_0^t h(t-\varrho)\Delta u(\varrho)d\varrho, u_t(t) \right)_{L^2(\Omega)} + \beta_1(|u_t|^{m-2}u_t, u_t)_{L^2(\Omega)} \\ & + \beta_2(|y(x, 1, t)|^{m-2}y(x, 1, t), u_t(t))_{L^2(\Omega)} - (ku|u|^{\gamma-2}\ln|u|, u_t(t))_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Un calcul direct donne

$$(|u_t|^p u_{tt}(t), u_t(t))_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} (\|u_t(t)\|_{p+2}^{p+2}), \quad (3.9)$$

$$-(\Delta u_{tt}(t), u_t(t))_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla u_t(t)\|_2^2), \quad (3.10)$$

en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & -(M(t)\Delta u(t), u_t(t))_{L^2(\Omega)} \\ = & -\left((\zeta_0 + \zeta_1 \|\nabla u\|_2^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))_{L^2(\Omega)}) \Delta u(t), u_t(t) \right)_{L^2(\Omega)} \\ = & \left(\zeta_0 + \zeta_1 \|\nabla u\|_2^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))_{L^2(\Omega)} \right) \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla u_t(t) dx \\ = & \left(\zeta_0 + \zeta_1 \|\nabla u\|_2^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))_{L^2(\Omega)} \right) \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \right) \\ = & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left(\zeta_0 + \frac{\zeta_1}{2} \|\nabla u\|_2^2 \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} + \frac{\sigma}{4} \frac{d}{dt} (\|\nabla u(t)\|_2^2)^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

et nous avons

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^t h(t-\varrho) \Delta u(\varrho) d\varrho, u_t(t) \right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_0^t h(t-\varrho) (\Delta u(\varrho), u_t(t))_{L^2(\Omega)} d\varrho \\
&= - \int_0^t h(t-\varrho) \left(\int_{\Omega} \nabla u(x, \varrho) \nabla u(x, t) dx \right) d\varrho,
\end{aligned}$$

et

$$- \nabla u(x, \varrho) \cdot \nabla u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|\nabla u(x, \varrho) - \nabla u(x, t)|^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|\nabla u(x, t)|^2 \right),$$

et nous avons

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t h(t-\varrho) (\nabla u(\varrho), \nabla u_t(t))_{L^2(\Omega)} d\varrho \\
&= - \int_0^t h(t-\varrho) \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|\nabla u(x, \varrho) - \nabla u(x, t)|^2 \right) \right\} dx d\varrho \\
& \quad - \int_0^t h(t-\varrho) \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|\nabla u(x, t)|^2 \right) \right\} dx d\varrho \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t h(t-\varrho) \left[\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x, t) - \nabla u(x, \varrho)|^2 dx \right) \right] d\varrho \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^t h(t-\varrho) \left[\frac{d}{dt} \left(\|\nabla u(x, t)\|_2^2 \right) \right] dx d\varrho. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

En utilisant (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^t h(t-\varrho) \left\{ \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x, t) - \nabla u(x, \varrho)|^2 dx \right) \right\} d\varrho \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t h(t-\varrho) \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x, t) - \nabla u(x, \varrho)|^2 dx \right) \right\} d\varrho \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^t h'(t-\varrho) \left[\int_{\Omega} |\nabla u(x, t) - \nabla u(x, \varrho)|^2 dx \right] d\varrho \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (h \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} (h' \circ \nabla u)(t), \tag{3.13}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^t h(t-\varrho) \left[\frac{d}{dt} \left\{ \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} \right] dx d\varrho \\
&= -\frac{1}{2} \left(\int_0^t h(t-\varrho) d\varrho \right) \left(\frac{d}{dt} \left\{ \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \left(\int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \left(\frac{d}{dt} \left\{ \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} + \frac{1}{2} h(t) \|\nabla u(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

En substituant (3.13) et (3.14) dans (3.12), donne

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^t h(t-\varrho) \Delta u(\varrho) d\varrho, u_t(t) \right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} (h \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} \left(\int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} \\
& \quad - \frac{1}{2} (h' \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2} h(t) \|\nabla u(t)\|_2^2,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

et nous avons

$$- (ku|u|^{\gamma-2} \ln |u|, u_t(t))_{L^2(\Omega)} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{k}{\gamma^2} \|u(t)\|_\gamma^\gamma - \frac{1}{\gamma} \int_\Omega |u|^\gamma \ln |u|^k dx \right\}. \tag{3.16}$$

Maintenant, en multipliant l'équation (3.5)₂ par $-y\xi$, et en intégrant sur $\Omega \times (0, 1)$, et en utilisant (3.4)₂, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \frac{\xi}{m} \int_\Omega \int_0^1 |y(x, \rho, t)|^m d\rho dx \\
&= -\left(\frac{\xi}{\tau}\right) \int_\Omega \int_0^1 |y|^{m-1} y_\rho d\rho dx \\
&= -\frac{\xi}{m\tau} \int_\Omega \int_0^1 \frac{d}{d\rho} |y(x, \rho, s, t)|^m d\rho dx \\
&= \frac{\xi}{m\tau} \int_\Omega (|y(x, 0, t)|^m - |y(x, 1, t)|^m) dx \\
&= \frac{\xi}{m\tau} \left(\int_\Omega |u_t(t)|^m dx - \int_\Omega |y(x, 1, t)|^m dx \right) \\
&= \frac{\xi}{m\tau} (\|u_t(t)\|_m^m - \|y(x, 1, t)\|_m^m),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

et par l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} & \beta_2 \left(|y(x, 1, t)|^{m-2} y(x, 1, t), u_t(t) \right)_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \frac{|\beta_2|}{m} \|u_t(t)\|_m^m + \frac{(m-1)|\beta_2|}{m} \|y(x, 1, t)\|_m^m. \end{aligned} \quad (3.18)$$

En remplaçant (3.9)-(3.11) et (3.15)-(3.18) dans (3.8), on trouve (3.6) and (3.7), où $C_0 = \min\{\beta_1 - \frac{\xi}{m\tau} - \frac{|\beta_2|}{m}, \frac{\xi}{m\tau} - \frac{(m-1)|\beta_2|}{m}\}$.

Ceci achève la preuve. $\square$

Le résultat d'existence locale pour le problème (3.5) est énoncé sans fournir de preuve. En fait, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et une combinaison de travaux de Feng, Liu et Piskin [[32], [54], [67]], on peut démontrer ce théorème.

Théorème 3.1. *Supposons que (3.2)-(3.3) sont satisfaits. Alors, pour tous $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, et $f_0 \in L^2(\Omega, (0, 1))$, il existe une solution faible u du problème (3.5) tel que*

$$\begin{aligned} u & \in C([0, T[, H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T[, L^2(\Omega)), \\ u_t & \in C([0, T[, H_0^1(\Omega)) \cap L^2([0, T[, L^2(\Omega, (0, 1))). \end{aligned}$$

Lemme 3.2. [43] *Il existe une constante positive $c(\Omega)$ strictement positive, telle que*

$$\left(\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \right)^{\frac{s}{\gamma}} \leq c \left(\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx + \|\nabla u\|_2^2 \right),$$

pour tout $2 \leq s \leq \gamma$, à condition que $\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \geq 0$.

Corollaire 3.1. [43] *Il existe une constante positive $c(\Omega)$ strictement positive, telle que*

$$\|u\|_2^2 \leq c \left[\left(\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \right)^{\frac{2}{\gamma}} + \|\nabla u\|_2^{\frac{4}{\gamma}} \right],$$

à condition que $\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \geq 0$.

Lemme 3.3. [43] *Il existe une constante positive $c(\Omega) > 0$, telle que*

$$\|u\|_\gamma^s \leq c \left(\|u\|_\gamma^\gamma + \|\nabla u\|_2^2 \right),$$

pour tout $u \in L^\gamma(\Omega)$ et $2 \leq s \leq \gamma$.

3.2 Résultat d'explosion

Dans cette section, nous démontrons le résultat d'explosion de la solution du problème (3.5).

Premièrement, nous définissons la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(t) = -E(t) &= -\frac{1}{p+2} \|u_t\|_{p+2}^{p+2} - \frac{1}{2} \left(\zeta_0 - \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \frac{\zeta_1}{4} \|\nabla u(t)\|_2^4 - \frac{1}{2} (h \circ \nabla u)(t) \\ &\quad - \frac{k}{\gamma^2} \|u(t)\|_\gamma^\gamma + \frac{1}{\gamma} \int_\Omega |u|^\gamma \ln |u|^k dx - \frac{\xi}{m} \int_0^1 \|y(x, \rho, t)\|_m^m d\rho. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Théorème 3.2. *Supposons (3.2)-(3.3) soient vérifiées, et on suppose que $E(0) < 0$. Alors, la solution du problème. (3.5) explose en temps fini.*

Démonstration. De (3.7), nous avons

$$E(t) \leq E(0) \leq 0.$$

Donc

$$\mathbb{H}'(t) = -E'(t) \geq C_0 (\|u_t(t)\|_m^m + \|y(x, 1, t)\|_m^m),$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{H}'(t) &\geq C_0 \|u_t(t)\|_m^m \geq 0 \\ \mathbb{H}'(t) &\geq C_0 \|y(x, 1, t)\|_m^m \geq 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Par (3.19), nous avons

$$0 \leq \mathbb{H}(0) \leq \mathbb{H}(t) \leq \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} |u|^{\gamma} \ln |u|^k dx. \quad (3.21)$$

On pose

$$\mathcal{K}(t) = \mathbb{H}^{1-\alpha} + \frac{\varepsilon}{p+1} \int_{\Omega} u |u_t|^p u_t dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \frac{\sigma}{4} \|\nabla u\|_2^4, \quad (3.22)$$

où $\varepsilon > 0$ sera attribué plus tard et

$$\frac{2(\gamma-1)}{\gamma^2} < \alpha < \frac{\gamma-2}{2\gamma} < 1. \quad (3.23)$$

En multipliant (3.5)₁ par u et avec une dérivée de (3.22), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(t) &\geq (1-\alpha) \mathbb{H}^{-\alpha} \mathbb{H}'(t) + \frac{\varepsilon}{p+1} \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \varepsilon \|\nabla u_t\|_2^2 + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{\gamma} \ln |u|^k dx \\ &\quad - \varepsilon \zeta_0 \|\nabla u\|_2^2 - \varepsilon \zeta_1 \|\nabla u\|_2^4 + \underbrace{\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-\varrho) \nabla u(\varrho) d\varrho dx}_{J_1} \\ &\quad - \underbrace{\varepsilon \beta_1 \int_{\Omega} u \cdot u_t \cdot |u_t|^{m-2} dx}_{J_2} - \underbrace{\varepsilon \beta_2 \int_{\Omega} u \cdot y(x, 1, t) \cdot |y(x, 1, t)|^{m-2} dx}_{J_3}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon \int_0^t h(t-\varrho) d\varrho \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla u(\varrho) - \nabla u(t)) dx d\varrho + \varepsilon \int_0^t h(\varrho) d\varrho \|\nabla u\|_2^2 \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \|\nabla u\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2} (h \circ \nabla u), \end{aligned}$$

Et, pour $\delta_1, \delta_2 > 0$

$$\begin{aligned} J_2 &\geq -\varepsilon \delta_1 \|u\|_2^2 - \varepsilon \frac{c_1}{4\delta_1} \|u_t\|_m^m, \\ J_3 &\geq -\varepsilon \delta_2 \|u\|_2^2 - \varepsilon \frac{c_2}{4\delta_2} \|y(x, 1, t)\|_m^m. \end{aligned}$$

De (3.24), On trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(t) &\geq (1-\alpha) \mathbb{H}^{-\alpha}(t) \mathbb{H}'(t) + \frac{\varepsilon}{p+1} \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \varepsilon \|\nabla u_t\|_2^2 + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{\gamma} \ln |u|^k dx \\ &\quad - \varepsilon \zeta_1 \|\nabla u\|_2^4 - \varepsilon \left[\left(\zeta_0 - \frac{1}{2} \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \|\nabla u\|_2^2 \right] - \frac{\varepsilon}{2} (h \circ \nabla u) \\ &\quad - \varepsilon (\delta_1 + \delta_2) \|u\|_2^2 - \varepsilon \frac{c_1}{4\delta_1} \|u_t\|_m^m - \varepsilon \frac{c_2}{4\delta_2} \|y(x, 1, t)\|_m^m. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ici, en fixant δ_1, δ_1 afin que, pour de grandes valeurs de κ à préciser ultérieurement,

$$\frac{c_1}{4C_0\delta_1} = \frac{\mathbb{H}^{-\alpha}(t)}{2}, \quad \frac{c_2}{4C_0\delta_2} = \frac{\mathbb{H}^{-\alpha}(t)}{2},$$

par (3.20) Et en substituant dans (3.25), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(t) \geq & [(1-\alpha) - \varepsilon\kappa] \mathbb{H}^{-\alpha}(t) \mathbb{H}'(t) + \frac{\varepsilon}{p+1} \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \varepsilon \|\nabla u_t\|_2^2 \\ & - \frac{\varepsilon}{2} (h \circ \nabla u) - \varepsilon \zeta_1 \|\nabla u\|_2^4 - \varepsilon \left(\zeta_0 - \frac{1}{2} \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \|\nabla u\|_2^2 \\ & - \varepsilon \left(\frac{c_3 \mathbb{H}^\alpha(t)}{2C_0\kappa} \right) \|u\|_2^2 + \varepsilon \int_\Omega |u|^\gamma \ln |u|^k dx, \end{aligned} \quad (3.26)$$

où $c_3 = c_1 + c_2$.

Maintenant, pour $0 < a < 1$, de (3.19)

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_\Omega |u|^\gamma \ln |u|^k dx &= \varepsilon a \int_\Omega |u|^\gamma \ln |u|^k dx + \frac{\varepsilon \gamma (1-a)}{p+2} \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \varepsilon \gamma (1-a) \mathbb{H}(t) \\ &+ \varepsilon \frac{\gamma(1-a)}{2} \left(\zeta_0 - \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon \frac{\gamma(1-a)}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \\ &+ \varepsilon \frac{\zeta_1 \gamma(1-a)}{2} \|\nabla u\|_2^4 - \varepsilon \frac{\gamma(1-a)}{2} ((h \circ \nabla u)) \\ &+ \frac{\varepsilon k(1-a)}{\gamma} \|u\|_\gamma^\gamma + \frac{\varepsilon \gamma(1-a) \xi}{m} \int_0^1 \|y(x, \rho, t)\|_m^m d\rho. \end{aligned}$$

En substituant dans (3.26), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(t) \geq & \{(1-\alpha) - \varepsilon\kappa\} \mathbb{H}^{-\alpha} \mathbb{H}'(t) + \varepsilon a \int_\Omega |u|^\gamma \ln |u|^k dx \\ & + \varepsilon \left\{ \frac{\gamma(1-a)}{p+2} + \frac{1}{p+1} \right\} \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \varepsilon \left\{ 1 + \frac{\gamma(1-a)}{2} \right\} \|\nabla u_t\|_2^2 \\ & + \varepsilon \left\{ \frac{\gamma(1-a)}{2} \left(\zeta_0 - \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) - \left(\zeta_0 - \frac{1}{2} \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \right\} \|\nabla u\|_2^2 \\ & + \varepsilon \zeta_1 \left\{ \frac{\gamma(1-a)}{2} - 1 \right\} \|\nabla u\|_2^4 + \varepsilon \left\{ \frac{\gamma(1-a)}{2} - \frac{1}{2} \right\} (h \circ \nabla u) \\ & - \varepsilon \left(\frac{c_3 \mathbb{H}^\alpha(t)}{2C_0\kappa} \right) \|u\|_2^2 + \frac{\varepsilon k(1-a)}{\gamma} \|u\|_\gamma^\gamma + \varepsilon \gamma (1-a) \mathbb{H}(t) \\ & + \frac{\varepsilon \gamma(1-a) \xi}{m} \int_0^1 \|y(x, \rho, t)\|_m^m d\rho. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Selon (3.21), (corollaire 4.1) et l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^\alpha(t) \|u\|_2^2 &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \right)^\alpha \|u\|_2^2 \\
&\leq c \left[\left(\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \right)^{\alpha + \frac{2}{\gamma}} + \left(\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \right)^\alpha \|\nabla u\|_2^{\frac{4}{\gamma}} \right] \\
&\leq c \left[\left(\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \right)^{\frac{(\alpha\gamma+2)}{\gamma}} + \left(\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \right)^{\frac{\alpha\gamma}{(\gamma-2)}} + \|\nabla u\|_2^2 \right]
\end{aligned}$$

D'après (3.23), on obtient

$$2 < \alpha\gamma + 2 \leq \gamma \text{ et } 2 < \frac{\alpha\gamma^2}{\gamma-2} \leq \gamma.$$

Par conséquent, le lemme 3.2 donne

$$\mathbb{H}^\alpha(t) \|u\|_2^2 \leq c \left(\int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx + \|\nabla u\|_2^2 \right). \quad (3.28)$$

En combinant (3.27) et (3.28), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}'(t) &\geq \{(1-\alpha) - \varepsilon\kappa\} \mathbb{H}^{-\alpha} \mathbb{H}'(t) + \varepsilon \left\{ a - \frac{c_4}{2C_0\kappa} \right\} \int_{\Omega} |u|^\gamma \ln |u|^k dx \\
&+ \varepsilon \left\{ \frac{\gamma(1-a)}{p+2} + \frac{1}{p+1} \right\} \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \varepsilon \left\{ 1 + \frac{\gamma(1-a)}{2} \right\} \|\nabla u_t\|_2^2 \\
&+ \varepsilon \left\{ \frac{\gamma(1-a)}{2} \left(\zeta_0 - \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) - \left(\zeta_0 - \frac{1}{2} \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) - \frac{c_4}{2C_0\kappa} \right\} \|\nabla u\|_2^2 \\
&+ \varepsilon \zeta_1 \left\{ \frac{\gamma(1-a)}{2} - 1 \right\} \|\nabla u\|_2^4 + \varepsilon \left(\frac{\gamma(1-a)}{2} - \frac{1}{2} \right) (h \circ \nabla u) \\
&+ \frac{\varepsilon k(1-a)}{\gamma} \|u\|_\gamma^\gamma + \varepsilon \gamma(1-a) \mathbb{H}(t) + \frac{\varepsilon \gamma(1-a) \xi}{m} \int_0^1 \|y(x, \rho, t)\|_m^m d\rho.
\end{aligned}$$

À cette étape, nous prenons $a > 0$ suffisamment petit pour que

$$\lambda_1 = \frac{\gamma(1-a)}{2} - 1 > 0,$$

et nous supposons

$$\int_0^\infty h(\varrho) d\varrho < \frac{\frac{\gamma(1-a)}{2} - 1}{\frac{\gamma(1-a)}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 + 1},$$

donne

$$\lambda_2 = \left\{ \left(\frac{\gamma(1-a)}{2} - 1 \right) - \left(\int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \left(\frac{\gamma(1-a)}{2} - \frac{1}{2} \right) \right\} > 0,$$

alors nous choisissons κ suffisamment grand pour que

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= a - \frac{c_4}{2C_0\kappa} > 0, \\ \lambda_4 &= \lambda_2 - \frac{c_4}{2C_0\kappa} > 0. \end{aligned}$$

Finalement, nous fixons κ et a , et nous choisissons ε suffisamment petit pour que

$$\lambda_5 = (1 - \alpha) - \varepsilon\kappa > 0,$$

et

$$\mathcal{K}(0) > 0.$$

Ainsi, pour un certain $\eta > 0$, l'estimation (3.27) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(t) \geq & \eta \left\{ \mathbb{H}(t) + \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \|\nabla u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + (h \circ \nabla u) + \|u\|_\gamma^\gamma \right. \\ & \left. + \|\nabla u\|_2^4 + \int_0^1 \|y(x, \rho, t)\|_m^m d\rho + \int_\Omega |u|^\gamma \ln |u|^k dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ensuite, en utilisant les inégalités de Hölder et de Young, nous avons

$$\left| \int_\Omega u |u_t|^p u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \left(\|u\|_\gamma^{\frac{\theta}{1-\alpha}} + \|u_t\|_{p+2}^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \right), \quad (3.30)$$

où $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$,

nous prenons $\mu = (p+2)(1-\alpha)$, pour obtenir

$$\frac{\theta}{1-\alpha} = \frac{p+2}{(1-\alpha)(p+2)-1} \leq \gamma$$

De plus, pour $s = \frac{p+2}{(1-\alpha)(p+2)-1}$, l'estimation (3.30) donne

$$\left| \int_\Omega u |u_t|^p u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \left[\|u\|_\gamma^s + \|u_t\|_{p+2}^{p+2} \right].$$

Alors, le lemme 3.3 donne

$$\left| \int_\Omega u |u_t|^p u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \left[\|u\|_\gamma^\gamma + \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \|\nabla u\|_2^2 \right].$$

De même, nous avons

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \left[\|\nabla u\|_2^{\frac{\theta}{1-\alpha}} + \|\nabla u_t\|_2^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \right],$$

où $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$,

nous prenons $\theta = 4(1-\alpha)$, pour obtenir

$$\frac{\mu}{1-\alpha} = \frac{4}{4(1-\alpha)-1} \leq 2$$

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \left[\|\nabla u\|_2^4 + \|\nabla u_t\|_2^2 \right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) &= \left(\mathbb{H}^{1-\alpha} + \frac{\varepsilon}{p+1} \int_{\Omega} u |u_t|^p u_t dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \varepsilon \frac{\sigma}{4} \|\nabla u\|_2^4 \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq c \left(\mathbb{H}(t) + \left| \int_{\Omega} u |u_t|^p u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} + \|\nabla u\|_2^{\frac{4}{1-\alpha}} \right) \\ &\leq c \left(\mathbb{H}(t) + \|u\|_{\gamma}^{\gamma} + \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^4 + \|\nabla u_t\|_2^2 \right) \\ &\leq c \left(\mathbb{H}(t) + \|u\|_{\gamma}^{\gamma} + \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^4 + \|\nabla u_t\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + (h \circ \nabla u) + \int_0^1 \|y(x, \rho, t)\|_m^m d\rho + \int_{\Omega} |u|^{\gamma} \ln |u|^k dx \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

De (3.29) et (3.31), on obtient

$$\mathcal{K}'(t) \geq \Gamma \mathcal{K}^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \quad (3.32)$$

où $\Gamma > 0$, cela dépend uniquement de η et c .

Par intégration de (3.32), nous obtenons

$$\mathcal{K}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \geq \frac{1}{\mathcal{K}^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0) - \Gamma \frac{\alpha}{(1-\alpha)} t}.$$

Par conséquent, $\mathcal{K}(t)$ explose en temps fini.

$$T \leq T^* = \frac{1-\alpha}{\Gamma \alpha \mathcal{K}^{\alpha/(1-\alpha)}(0)}.$$

Alors, la preuve est complète. □

Conclusion

Dans ce modeste travail de recherche, on s'est penché sur l'étude d'une équation d'onde viscoélastique non linéaire intégrant une non-linéarité logarithmique avec retard distribué. Nous avons établi des résultats d'existence locale et d'unicité des solutions, ainsi que des critères suffisants garantissant l'explosion en temps fini sous certaines conditions sur les données initiales.

On a aussi étudié le phénomène d'explosion en temps fini des solutions d'un système viscoélastique intégrant une non-linéarité logarithmique de type Kirchhoff, avec amortissement de Balakrishnan-Taylor. Nous avons établi des résultats d'existence locale ainsi que des critères suffisants garantissant le blow-up sous des conditions appropriées sur l'énergie initiale.

L'analyse met en évidence l'impact significatif des effets de mémoire et de la non-linéarité logarithmique sur la dynamique des solutions, en révélant des mécanismes précis menant à l'instabilité. Les méthodes basées sur les estimations d'énergie et la méthode de la concavité offrent un cadre robuste pour l'étude d'autres systèmes hyperboliques non linéaires.

Résumé de thèse

Le but de cette thèse est d'étudier l'existence locale des solutions d'un problème associé à une équation d'onde viscoélastique non linéaire comportant une source logarithmique et des termes de retard distribué. Nous établissons un résultat d'existence locale, ainsi qu'un résultat d'explosion en temps fini pour des solutions correspondant à une énergie initiale négative, sous des hypothèses appropriées.

On s'intéresse à ce qui suit

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s) \Delta u(t-s) ds + \mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| u_t(x, t-s) ds \\ \quad = u |u|^{p-2} \ln |u|^k, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u_t(x, -t) = f_0(x, t), \quad u(x, -t) = f_1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \tau_2), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right.$$

L'énergie associée à ce système pour une solution classique est définie par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^\infty g(s) ds \right) \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|_g^2 + \frac{k}{p^2} \|u\|_p^p \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx. \end{aligned}$$

On a

$$E'(t) \leq -c_1 \left(\|u_t\|_2^2 + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx + \|\eta\|_g^2 \right).$$

Pour démontrer les résultats, nous avons utilisé la méthode qui repose sur la construction d'un opérateur $\mathcal{K}$ équivalent topologiquement à la fonction énergie et satisfaisant à l'inégalité différentielle

$$\mathcal{K}'(t) \geq \Gamma \mathcal{K}^{\frac{1}{1-\alpha}}(t).$$

Par conséquent, $K(t)$ explose en temps

$$T \leq T^* = \frac{1-\alpha}{\lambda \alpha \mathcal{K}^{\alpha/(1-\alpha)}(0)}$$

On a étudié également le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t|^p u_{tt} - M(t) \Delta u(t) + \int_0^t h(t-\varrho) \Delta u(\varrho) d\varrho - \Delta u_{tt}(t) \\ + \beta_1 |u_t(t)|^{m-2} u_t(t) + \beta_2 |u_t(t-\tau)|^{m-2} u_t(t-\tau) = u|u|^{\gamma-2} \ln |u|^k. \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{in } \Omega \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), \quad \text{in } \Omega \times (0,\tau) \\ u(x,t) = 0, \quad \text{in } \partial\Omega \times (0,\infty) \end{array} \right.$$

où $M(t)$ la fonction de kirchhoff

$$M(t) := \left(\zeta_0 + \zeta_1 \|\nabla u\|_2^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))_{L^2(\Omega)} \right),$$

On réécrit le système précédent sous une forme équivalente afin de faciliter l'analyse énergétique. Par conséquent, la fonction d'énergie associée est définie par

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{p+2} \|u_t\|_{p+2}^{p+2} + \frac{1}{2} \left(\zeta_0 - \int_0^t h(\varrho) d\varrho \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ & + \frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \frac{\zeta_1}{4} \|\nabla u(t)\|_2^4 + \frac{1}{2} (h \circ \nabla u)(t) + \frac{k}{\gamma^2} \|u(t)\|_\gamma^\gamma \\ & - \frac{1}{\gamma} \int_\Omega |u|^\gamma \ln |u|^k dx + \frac{\xi}{m} \int_0^1 \|y(x,\rho,t)\|_m^m d\rho, \end{aligned}$$

satisfait

$$\begin{aligned} E'(t) \leq & -C_0 (\|u_t(t)\|_m^m + \|y(x,1,t)\|_m^m) + \frac{1}{2} (h' \circ \nabla u)(t) \\ & - \frac{1}{2} h(t) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{\sigma}{4} \left[\frac{d}{dt} (\|\nabla u(t)\|_2^2) \right]^2 \leq 0, \end{aligned}$$

On adopte une application $\mathcal{K}(t)$ dans le but d'obtenir l'inégalité différentielle

$$\mathcal{K}'(t) \geq \Gamma \mathcal{K}^{\frac{1}{1-\alpha}}(t).$$

$$T \leq T^* = \frac{1-\alpha}{\lambda \alpha \mathcal{K}^{\alpha/(1-\alpha)}(0)}$$

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, . and J.F. Fourier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, (2003)
- [2] M. Al-Gharabli, M. Balegh, B. Feng, Z. Hajjej, and S. A. Messaoudi. *Existence and general decay of Balakrishnan-Taylor viscoelastic equation with nonlinear frictional damping and logarithmic source term*. Evolution Equations and Control Theory, 11(4) : 1149-1173, (2022)
- [3] K. Agre, M. A. Rammaha. *Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms*. Different. Integr. Equat, 19 : 1235-1270, (2007)
- [4] R. Aounallah, S. Boulaaras, A. Zarai and B. Cherif, General decay and blow up of solution for a nonlinear wave equation with a fractional boundary damping, Math. Methods Appl. Sci., 43 : 7175-7193. doi : 10.1002/mma.6455, (2020)
- [5] J. Ball. *Remarks on Blow-Up and Nonexistence Theorems for Nonlinear Evolutions Equation*. Quarterly Journal of Mathematics, 28 : 473-486, (1977),
- [6] A.V. Balakrishnan, L.W. Taylor. *Distributed parameter nonlinear damping models for flight structures*. In : Proceedings (Damping 89), Flight Dynamics Lab and Air Force Wright Aeronautical Labs, Washington : WPAFB ; 1989.
- [7] J.D. Barrow, P. Parsons. *Inflationary models with logarithmic potentials*. Phys Rev D ;52 :5576-5587, (1995)
- [8] K. Bartkowski, P. Gorka. *One-dimensional Klein-Gordon equation with logarithmic nonlinearities*. J Phys A. ;41(35) :355201.(2008)

- [9] R.W. Bass, D. Zes. *Spillover nonlinearity, and flexible structures*. The Fourth NASA Workshop on Computational Control of Flexible Aerospace Systems. Washington : NASA Conference Publication 10065 :1-14, (1991).
- [10] I. Bialynicki-Birula, J. Mycielski. *Wave equations with logarithmic nonlinearities*. Bull Acad Polon Sci Ser Sci Math Astronom Phys ; 23(4) :461-466, (1975).
- [11] D.R. Bland. *The theory of linear viscoelasticity*. Mineola : Courier Dover Publications, (2016).
- [12] S. Boulaaras, A. Choucha, D. Ouchenane, B. Cherif. *Blow up of solutions of two singular nonlinear viscoelastic equations with general source and localized frictional damping terms*. Adv. Differ. Equ, 310, (2020).
- [13] S. Boulaaras, A. Draifia, Kh. Zennir. *General decay of nonlinear viscoelastic Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and logarithmic nonlinearity*. Math Meth Appl Sci ;42 :4795-4814, (2019)
- [14] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle théorie et applications*. Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo, (1987).
- [15] M. M. Cavalcanti, D. Cavalcanti, J. Ferreira. *Existence and uniform decay for non-linear viscoelastic equation with strong damping*. Math. Meth. Appl. Sci., 24 :1043-1053, (2001)
- [16] T. Cazenave, A. Haraux. *Equations d'évolution avec non-linéarité logarithmique*. Ann Fac Sci Toulouse Math (5). 1980 ;2(1) :21-51, (1980).
- [17] T. Cazenave, A. Haraux. *Equation de Schrodinger avec non-linéarité logarithmique*. C R Acad Sci Paris Ser A-B ; 288 :A253-A256, (1979).
- [18] T. Cazenave. *Stable solutions of the logarithmic Schrodinger equation*. Nonlinear Anal. (1983) ; 7 :1127-1140, (1983).
- [19] A Choucha, S. Boulaaras, D.Ouchenane, and R.Jan. *Blow up, Growth and Decay of Solutions for Class of a Coupled Nonlinear Viscoelastic Kirchhoff Equations with*

-
- Variable Exponents and Fractional Boundary Conditions. SpringerLing.com, Vol. 41, :344-374, 2025. N₀. 2(2025), doi.org /10.1007/s100255-024-1150-3, (2025).*
- [20] A. Choucha, S. Boulaaras, R. Jan, and R. Alharbi, *Blow-up and decay of solutions for a viscoelastic Kirchhoff-type equation with distributed delay and variable exponents*, Math. Meth. Appl. Sci, 1–18, DOI 10.1002/mma.9950, (2024).
- [21] A. Choucha, S. Boulaaras. *Asymptotic behavior for a viscoelastic Kirchhoff equation with distributed delay and Balakrishnan-Taylor damping*. Boundary Value Problems. . DOI : 10.1186/s13661-021-01555-0, (2021).
- [22] A. Choucha, D. Ouchenane, Kh. Zennir, and B. Feng. *Global well-posedness and exponential stability results of a class of Bresse-Timoshenko-type systems with distributed delay term*. Math Meth Appl Sci : 1-26. DOI : 10.1002/mma.6437, (2020).
- [23] A. Choucha, D. Ouchenane, and S. Boulaaras. *Well Posedness and Stability result for a Thermoelastic Laminated Timoshenko Beam with distributed delay term*. Math Meth Appl Sci. :1-22. DOI : 10.1002/mma.6673, (2020).
- [24] A. Choucha, D. Ouchenane, and S. Boulaaras. *Blow-up of a nonlinear viscoelastic wave equation with distributed delay combined with strong damping and source terms*. J. Nonlinear Funct. Anal., Article ID 31 <https://doi.org/10.23952/jnfa.2020.31>, (2020).
- [25] A. Choucha, S. Boulaaras, D. Ouchenane, and S. Beloul. *General decay of nonlinear viscoelastic Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping, logarithmic nonlinearity and distributed delay terms*. Math Meth Appl Sci, 1-22. DOI :10.1002/mma.7121, (2020).
- [26] A. Choucha, S. M. Boulaaras, D. Ouchenane, B.B. Cherif, and M. Abdalla. *Exponential Stability of Swelling Porous Elastic with a Viscoelastic Damping and Distributed Delay Term*. JFS. V(2021), Article ID 5581634, <https://doi.org/10.1155/2021/5581634>, (2021).

- [27] A Choucha, M Hidan, B Cherif and Sahar Ahmed Idris *Growth of solutions with $L^2(p+2)$ -norm for a coupled nonlinear viscoelastic Kirchhoff equation with degenerate damping terms.* AIMS Mathematic. 7(1) : 371-383 (2021)
- [28] H. Chen, P. Luo, G.W. Liu. *Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity.* J Math Anal Appl, 422 :84-98, (2015).
- [29] B.D. Coleman and W. Noll. *Foundations of linear viscoelasticity.* Reviews of Modern Physics, 33(2).239 (1961).
- [30] C.M. Dafermos. *Asymptotic stability in viscoelasticity.* Arch.Rational Mech.Anal.37, 297-308, <https://doi.org/10.1007/BF00251609>, (1970)
- [31] L. C.Evans , *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, (1998).
- [32] B. Feng, A. Soufyane. *Existence and decay rates for a coupled Balakrishnan-Taylor viscoelastic system with dynamic boundary conditions.* Math. Methods. Sci. 43, 3375-3391, (2020).
- [33] B. Feng and Y. H. Kang. *Decay rates for a viscoelastic wave equation with Balakrishnan-Taylor and frictional dampings.* Topological Methods in Nonlinear Analysis. Online, Vol. 54, no. 1, pp. 321 - 343, 21 July 2019
- [34] S. Georgiev, K. Zennir. *Functional Analysis with Applications.* www.degruyter.com. Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston 2019.
- [35] V. Georgiev, G. Todorova. *Existence of Solutions of the Wave Equation with Nonlinear Damping and Source Terms.* Journal of Differential Equations, 109, 295-308, (1994).
- [36] B. Gheraibia, N. Boumaza. *General decay result of solution for viscoelastic wave equation with Balakrishnan-Taylor damping and a delay term.* ZAMP. (2020)71 :198. Doi.org/10.1007/s00033-020-01426-1, (2020).

-
- [37] P. Gorka. *Logarithmic Klein-Gordon equation*. Acta Phys Polon B ; 40(1) :59-66, (2009).
 - [38] P. Gorka. *Convergence of logarithmic quantum mechanics to the linear one*. Lett Math Phys. 81 :253-264, (2007).
 - [39] P. Gorka. *Logarithmic quantum mechanics, existence of the ground state*. Found Phys Lett ; 19 :591-601, (2006).
 - [40] L. Gross. *Logarithmic Sobolev inequalities*. Amer J Math ; 97(4) :1061-1083, (1975)
 - [41] X. Han. *Global existence of weak solution for a logarithmic wave equation arising from Q-ball dynamics*. Bull Korean Math Soc ; 50 :275-283, (2013).
 - [42] A. Haraux, E. Zuazua. *Decay Estimates for Some Semilinear Damped Hyperbolic Problems*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 100, 191-206, (1988).
 - [43] M. Kafini, S.A. Messaoudi. *Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay*. Applicable Analysis,. DOI : 10.1080/00036811.2018.1504029, August 2018
 - [44] M. Kafini, S. A. Messaoudi. *A Blow-Up Result in a Cauchy Viscoelastic Problem*. Applied Mathematics Letters, 21, 549-553, (2008).
 - [45] V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types. Soviet. Math. 10 :53-70, (1978)
 - [46] G. Kirchhoff. *Vorlesungen uber Mechanik*. Leipzig : Tauber ; (1883).
 - [47] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*. Paris : Masson-John Wiley ; (1994).
 - [48]] Kopackova, M. "Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation". Comment Math. Univ.Carolin, 30(4). 713-719, (1989)
 - [49] I laribi, A.krelifa, D Ouchenane, F Yazid, S Boularass, S Zitouni. Exponential Decay of Laminated Beam with Nonlinear Time-varying Delay and Microtemperature

-
- Effect. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 2025, Vol. 41 Issue (1) : 270-285, (2025).
- [50] H. A. Levine. *Instability and Nonexistence of Global Solutions of Nonlinear Wave Equation of the Form $Pu_{tt} = Au + F(u)$* . Transactions of the American Mathematical Society, 192, (1974) 1-21, (1974).
- [51] H. A. Levine. *Some Additional Remarks on the Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equation*. SIA M Journal on Mathematical Analysis, 138-146, 5 (1974)
- [52] H.A. Levine and S.R. Park. Global existence and non-global existence of solutions of the cauch problem for non-linearly damped wave equation. *J. Maths. Anal. App.*, 228, 1998
- [53] G. Liang, Y. Zhaoqin, L. Guonguang. *Blow Up and Global Existence for a Nonlinear Viscoelastic Wave Equation with Strong Damping and Nonlinear Damping and Source terms*. *Applied Mathematics*, 6 : 806-816, 6 (2015)
- [54] W. Liu, B. Zhu, G. Li, D. Wang. *General decay for a viscoelastic Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping, dynamic boundary conditions and a time-varying delay term*. *Evol. Equ. Control Theory*. 6 : 239-260, (2017).
- [55] R.Mcownen, *Partial Differential Equations Methods and Applications*, . 2003, Prentice Hall.
- [56] F. Mesloub, S. Boulaaras. *General decay for a viscoelastic problem with not necessarily decreasing kernel*. *J Appl Math Comput*. 2018 ;58 :647-665. doi :10.1007/S12190-017-1161-9, (2018).
- [57] S. A. Messaoudi. *Blow Up and Global Existence in a Nonlinear Viscoelastic Wave Equation*. *Mathematische Nachrichten*, 260 : 58-66, [http ://dx.doi.org/10.1002/mana.200310104](http://dx.doi.org/10.1002/mana.200310104), (2003)
- [58] S. A. Messaoudi. *Blow Up in a Nonlinearly Damped Wave Equation*. *Mathematische Nachrichten*, 231 : 105-111, (2001).

-
- [59] S. A. Messaoudi. *Blow Up of Positive-Initial-Energy Solutions of a Nonlinear Viscoelastic Hyperbolic Equation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 320 : 902-915, (2006).
- [60] Mohamed Merouani, Djamel Ouchenane, Abdelbaki Choucha. *Blow-up of Solutions for a Viscoelastic Kirchhoff Equation with Alogarithmic Nonlinearity, Delay and Balakrishnan–Taylor Damping Term*. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 93 : 129–142. https://rmi.tsu.ge/memoirs/AoP/Ahead_of_Print.htm, (2024).
- [61] M. Milla Miranda and L. A Medeiros. *On the existence of global solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon equations*. Funkcial. Ekvac., 30(1) :147-161, 1987
- [62] C. Mu, J. Ma. *On a system of nonlinear wave equations with Balakrishnan-Taylor damping*. Z Angew Math Phys, 65 :91-113, (2014)
- [63] S. Nicaise, C. Pignotti. *Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay*. Diff. Int. Equs., 21 (9-10), 935-958, (2008)
- [64] S. Nicaise and C. Pignotti. *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks*. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 45, no. 5, pp. 1561-1585, 2006.
- [65] D. Ouchenane, K.Zennir, M.Byoud. *Global nonexistence of solutions for a system of nonlinear viscoelastic wave equations with degenerate damping and source terms*. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, Vol. 65, No. 7, pp. 654–669, July, 2013.
- [66] D. Ouchenane, A. Choucha, M. Abdalla, S. M. Boulaaras, and B. B. Cherif, *On the Porous-Elastic System with Thermoelasticity of Type III and Distributed Delay : Well-Posedness and Stability*, Journal of Function Spaces, Article ID 9948143, 12 pages. <https://doi.org/10.1155/2021/9948143>, Volume 2021

- [67] E. Piskin, J. Ferreira, H. Yüksekaya, and M. Shahrouzi. *Existence and asymptotic behavior for a logarithmic viscoelastic plate equation with distributed delay*. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 13, 2, 763-788. Doi.org/10.22075/ijnaa.2022.24639.2797, (2022).
- [68] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York : Springer-Verlag ; 1983.
- [69] M A. Rammaha and S Sakuntasathien Global existence and blow up of solutions to systems of nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms. Elsevier, Nonlinear Analysis.doi :10.1016/j.na.2009.013,2659-26983,2009.
- [70] I Segal. Nonlinear partial differential equations in quantum field theory. In Proc. Symp. Appl. Math. AMS, volume 17, pages 210–226, 1965.
- [71] E.Vitillaro. Global Nonexistence Theorems for a Class of Evolution Equations with Dissipation. Arch.Rational Mech, 155-182, 1999.
- [72] Z.Yang. Existence and asymptotic behavior of solutions for a class of quasi-linear evolution equations with non-linear damping and source terms. Math. Meth. Appl. Sci., 25. 795-814,2002

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'analyser l'existence locale des solutions d'un problème lié à une équation d'onde viscoélastique non linéaire intégrant une source logarithmique ainsi que des termes de retard distribué. Nous établissons un théorème d'existence locale et démontrons un phénomène d'explosion en temps fini pour des solutions associées à une énergie initiale négative, sous des hypothèses convenables.

Par ailleurs, nous étudions l'explosion en temps fini des solutions d'un système d'équations différentielles de type Kirchhoff, caractérisé par une non-linéarité logarithmique, des effets de retard et un amortissement de type Balakrishnan–Taylor.

Pour obtenir ces résultats, nous adoptons une approche fondée sur la construction d'un opérateur L , topologiquement équivalent à la fonction énergie, et vérifiant une inégalité différentielle bien choisie. Cette méthode permet notamment de déterminer un temps d'explosion explicite.

Mots-clés :

Équation d'onde viscoélastique ; existence locale ; explosion en temps fini ; non-linéarité logarithmique ; retard distribué ; équation de Kirchhoff ; énergie initiale négative ; amortissement de Balakrishnan–Taylor ; méthode énergétique ; inégalité différentielle.

Date de Soutenance: 26/01/2026

Mention: Très Honorables