REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE D'ORAN



FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée par

TIMIMOUN Chahnaz Zakia

Pour Obtenir

LE DIPLÔME DE Docteur

Spécialité : Mathématiques
Option : Contrôle et Optimisation

Intitulée :

Détection de la pollution et identification des défauts en élasticité linéaire.

Soutenue le : 18/04/13 à la salle de conférences de la faculté des sciences.
Devant les membres du jury :

B. MESSIRDI Professeur à l'Université d'Oran
(Président)

Y. MILOUDI Maître de Conférences A à l'Université d'Oran
(Directeur de Thèse)

M. DAMBRINE Professeur à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour (France)
(Co-Directeur de Thèse)

O.NAKOULIMA Professeur à l'Université des Antilles et de la Guyane (France)
(Examinateur)

F /Z. MEZEGHRANI Maître de Conférences A à l'Université d'Oran
(Examinatrice)

R. SAHRAOUI Maître de Conférences A à l'Université de Mostaganem.
(Examinatrice)

Année universitaire **: 2012/2013**

Je dédie cette thèse

A la mémoire de mon cher et regreté père qui a su durant toute sa vie me guider par ses encouragements et sa compréhension.

A ma mère qui ne cessa de m'encourager durant ces années d'études et qui a consacré sa vie pour ma réussite dans la vie, qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

A mes frères et soeurs pour leur soutien moral.

A mon époux L.Djebour pour ses encouragements.

A mes enfants, avec toute mon affection.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadreur Yamina Miloudi pour son aide précieuse et ses encouragements qui ont contribué à l'aboutissement de cette thèse et de m'avoir suivie dans mes recherches.

Je ne saurai jamais assez remercier le professeur Marc Dambrine pour le co-encadrement de ce travail, de m'avoir acceptée au sein de l'équipe du laboratoire de mathématiques appliquées de l'université de Pau et des pays de l'Adour durant mes stages et de m'avoir guidée dans mes recherches, qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Mes vifs remerciements au professeur Ousseynou Nakoulima pour son aide inestimable, ses encouragements et d'avoir accepté de venir de si loin pour être membre du jury.

Je tiens à remercier le professeur Bekkai Messirdi pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse, qu'il soit assuré de notre profond respect.

Je remercie également Mme Fatima Zohra Mezeghrani et Mme Rahma Sahraoui d'avoir accepté d'être membre du jury.

J'exprime également ma profonde reconnaissance au professeur Jean-Paul Penot d'avoir guidé mes pas durant mon premier stage à Pau.

Je tiens aussi à remercier Fabien Caubet pour son aide, sa disponibilité, ses encouragements et ses enrichissantes discussions qui m'ont aidée et guidée au cours de mes recherches.

Je tiens vivement à remercier le professeur Djalil Kateb pour ses encouragements.

Je voudrais également exprimer ma profonde gratitude à Nourelhouda Seloula et Abderrahmane Benosman pour leurs aides et leurs soutiens durant mes stages à Pau.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues du département de mathématiques de l'université d'Oran pour leurs encouragements et tout particulièrement mon amie Khadra Nachi qui m'a constamment encouragée et moralement soutenue durant les moments les plus difficiles et pour son aide dans l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction **5**

1 Préliminaires et théorie générale **9**

1.1 Notions de base 9

1.1.1 Espace de Sobolev 9

1.1.2 Opérateurs différentiels 12

1.1.3 Domaine de frontière régulière 13

1.1.4 Formule de Green 14

1.1.5 Formulation variationnelle 15

1.1.6 Théorèmes fondamentaux 18

1.1.7 Dérivation par rapport au domaine 21

1.1.8 Dérivée matérielle et dérivée de forme 23

1.1.9 Tenseurs 23

1.2 Rappels théoriques 24

1.2.1 Problème de Stokes 24

2 Contrôlabilité approchée avec contrainte sur le Contrôle **26**

2.1 Position du problème 26

2.1.1 Formulation du problème 26

2.2 Contrôlabilité approchée avec contraintes 28

2.3 Caractérisation du contrôle optimal 33

3 Application aux sentinelles discriminantes instantanées approchées 40

3.1 Equivalence à un problème de contrôlabilité approchée 43

3.1.1 Insensibilité de $\mathcal{S}$ par rapport aux termes manquants $\tau\widehat{y}^0$ 43

3.1.2 Insensibilité de $\mathcal{S}$ par rapport aux termes de bruit $\alpha_i e_i$ 44

3.1.3 Insensibilité de $\mathcal{S}$ par rapport aux termes de bruit $\beta_j m_j$ 44

4 Détection d'inclusion 47

4.1 Introduction 47

4.2 Etude du problème inverse 49

4.2.1 Notations générales 51

4.2.2 Position du problème 52

5 Optimisation de forme 55

5.1 Introduction 55

5.2 Optimisation de forme et problème de Stokes 55

5.2.1 Transformation du problème en un problème d'optimisation de forme 55

5.2.2 Résultat d'identifiabilité 56

5.2.3 Dérivées de forme d'ordre un des fonctions d'état $\mathbf{u}_N$ et $\mathbf{u}_D$ 57

5.2.4 Dérivée de forme d'ordre un de la fonctionnelle Kohn-Vogelius . . . 58

5.2.5 Dérivée de forme d'ordre deux de la fonctionnelle Kohn-Vogelius . . 61

5.2.6 Justification de l'instabilité : Compacité en un point critique 62

6 Expériences numériques 66

6.1 Cadre pour les simulations numériques. 66

6.2 La dégénérescence de la fonctionnelle 69

6.3 Une méthode adaptative 72

6.4 La détection d'objets avec des coins 73

6.5 Influence de la taille du domaine dans lequel les mesures sont effectuées . . 75

6.6 Détecter plus d'un objet 77

A Annexe **80**

A.1 Origines physiques du problème de Stokes 80

A.2 Quelques résultats sur le problème de Stokes avec des conditions mixtes . . 86

Bibliographie **92**

Notations

$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$; Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$

$\|f\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$;

$L^\infty(\Omega) := \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \text{ mesurable } / \ \exists c > 0, \forall x \in \Omega, \|f(x)\| \leq c \}$;

$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$: L'ensemble des applications $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω;

$\mathcal{D}'(\Omega)$: Le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$;

$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1.....N \right\}$: L'espace de Sobolev d'ordre 1;

$H_0^1(\Omega) := \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$;

$H^{2,1}(Q) := \left\{ u \in L^2(Q) : \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \ , \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \in L^2(Q) \ , \ i,j = 1,2,.....N \ , \ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q) \right\}$;

$L_0^2(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p dx = 0 \right\}$;

$|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i$, où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ multi-indice avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i = 1, ..., N$;

$D^\alpha u := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \partial x_d^{\alpha_N}} u$: α-ième dérivée partielle;

$C^{k,\alpha} := \left\{ f \text{ de classe } C^k : \ \exists c > 0, \ \sum\limits_{|q|=k} \left[\sup\limits_{x,y \neq 0} \left(\dfrac{|D^q f(x) - D^q f(y)|}{|x-y|^\alpha} \right) \right] \leq c \right\}$: Espace de Hölder, où q est un multi-indice;

$H^{1/2}(\partial\Omega) := \gamma_0(H^1(\Omega))$ où $\gamma_0 u = u_{/\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$;

$W^{1,\infty} := W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$: Ensemble des applications Lipschitziennes bornées;

$W^{k,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N) := \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N / \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \ |\alpha| \leq k; \ \ D^\alpha u \in L^\infty(\Omega) \right\}$

$\nabla u(x) := (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N}(x))^T$: Gradient de u;

$\operatorname{div} v(x) := \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + ... + \dfrac{\partial v_N}{\partial x_N}(x)$: Divergence de v;

$\Delta u(x) := \operatorname{div}(\nabla u) = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(x) + ... + \dfrac{\partial^2 u_N}{\partial x_N^2}(x)$: Laplacien de u;

$\partial_n u := \dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \ n$: Dérivée normle de u, où n est la normale extérieure au bord du domaine;

INTRODUCTION

L'analyse mathématique et numérique des problèmes inverses dans les équations différentielles et aux dérivées partielles ainsi que leurs applications aux problèmes socio-économiques et industriels, constitue le cœur du thème de recherche "Problèmes Inverses". Une recherche qui se concentre sur l'analyse mathématique et numérique des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. Cette recherche se focalise sur les problématiques liées aux problèmes inverses (identifiabilité, identification numérique, stabilité). Ce sujet est en plein essor tant au niveau national qu'international. De nombreux problèmes de la physique, chimie, de la biologie et de la géophysique sont modélisés par des systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles qui décrivent le comportement temporel ou spatio-temporel des inconnues du modèle. La résolution de ces équations constitue ce que l'on appelle le problème direct. Cela ne peut se faire que si tous les paramètres du système sont connus : les conditions initiales et aux limites, les coefficients intervenant dans les équations, ainsi que le domaine spatial.

Dans la pratique certains paramètres sont inconnus ou partiellement connus (coefficients des cinétiques de modèles biochimiques ou aérodynamiques, coefficients de diffusion dans des équations paraboliques, fissures ou obstacles dans des problèmes élastiques ou acoustiques, termes sources dans des problèmes elliptiques comme l'électro-encéphalographie (EEG) ou dans des équations paraboliques de pollution de rivière, certaines conditions initiales en météorologie, certaines conditions aux limites, etc.). La détermination de ces paramètres à partir de données expérimentales constitue ce que l'on appelle le problème inverse. Sa résolution fournit une information primordiale à l'expérimentateur qui, en général, possède un modèle de son système, mais avec une large incertitude sur les paramètres.

La difficulté principale du problème inverse est qu'il est mal posé dans le sens d'Hadamard. Principalement les deux points suivants lui font défaut :

- L'unicité de la solution : identifiabilité
- Sa dépendance continue par rapport aux données : stabilité.

L'absence de la stabilité est problématique, en particulier en vue d'une résolution numérique. Ce qui implique des méthodes dites de régularisation. La non-unicité est un problème sérieux. Dans le cas de plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires. Les thèmes abordés sont :

- ▶ Identifiabilité structurelle de modèles paramétriques représentés par des systèmes d'équations différentielles non-linéaires ou non, éventuellement avec retard.
- ▶ Estimation numérique des paramètres des modèles précédents, extension aux équations aux dérivées partielles
- ▶ Méthode des équations intégrales et application
- ▶ Problèmes inverses de sources
- ▶ Optimisation de forme et problème inverse de conductivité
- ▶ Contrôle actif de dispositifs de transport de fluides

Les domaines d'application sont :

- ▶ Biomédical : localisation de sources épileptiques en EEG,...
- ▶ Environnement : identification de sources de pollution
- ▶ Aérospatiale : identification de sources de bruit
- ▶ Aéronautique : identification de coefficients aérodynamiques
- ▶ Pharmacocinétique : identification de coefficients
- ▶ Energie : calcul d'écoulements de pétrole dans un réservoir avec puits

Les techniques utilisées par les chercheurs pour s'attaquer à ces problèmes vont de l'analyse appliquée à l'analyse numérique.

Cette thèse fait l'étude de deux problèmes :

Dans une première partie, on étudie la contrôlabilité approchée avec contraintes linéaires sur le contrôle pour les problèmes distribués. On trouve ce type de problèmes dans l'étude des sentinelles instantanées approchées qui sont des outils d'analyse mathématique de systèmes à données manquantes que l'on rencontre dans des problèmes de pollution.La notion de sentinelle est due à J. L. Lions [31]. Le concept a ensuite été généralisé par O. Nakoulima [41]. Brièvement, une sentinelle est la donnée :

d'une observation de support un ouvert $\mathcal{O}$ appelé observatoire ;

d'une fonction (la sentinelle proprement dite) définie par l'observation et un contrôle de support un ouvert ω distinct de $\mathcal{O}$.

La notion de sentinelle de Lions où le contrôle et l'observation sont dans le même support $\omega = \mathcal{O}$ devient ainsi un cas particulier.

Enfin, l'outil principal pour résoudre le problème de contrôlabilité approchée avec contraintes sur le contrôle est un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy mal posé pour l'équation de la chaleur.

Cette partie a fait l'objet d'un article paru [37]

Dans une seconde partie, on s'intéresse à la reconstruction d'une inclusion ω immergée dans un fluide contenu dans un plus grand domaine borné Ω, par une mesure sur le bord $\partial\Omega$. Le mouvement du fluide est gouverné par les équations de Stokes. On étudie le problème inverse de reconstruction de ω grâce aux méthodes d'optimisation de forme en définissant la fonctionnelle coût Kohn-Vogelius. Afin d'étudier la stabilité de ce problème, on montre la compacité de l'opérateur de Riesz correspondant au Hessien de forme de cette fonctionnelle en un point critique ce qui explique pourquoi le problème inverse est mal posé.

Cette partie a fait l'objet d'un article paru [13]

Plus précisément, notre étude s'articule autour de six chapitres :

Dans un premier chapitre, des outils mathématiques fondamentaux sont donnés. On rappelle particulièrement, quelques notions sur les espaces de Sobolev, sur les opérateurs différentiels ainsi que la formule de Green.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude d'un problème de contrôlabilité approchée avec contraintes sur le contrôle. Après avoir donné la formulation du problème, on établit un résultat d'existence et d'unicité du contrôle optimal approché. On donne ensuite une caractérisation du contrôle optimal.

Dans le chapitre 3, on fait une application à la théorie des sentinelles discriminantes instantanées approchées. On rappelle dans un premier temps, la notion de sentinelle discriminante exacte et approchée. On interprète ensuite la condition de contrôlabilité à zéro

Le chapitre 4 concerne l'étude de la détection d'un objet immergé dans un fluide contenu dans un plus grand domaine borné Ω et régit par des équations de Stockes. En introduisant, la fonctionnelle coût à minimiser, on présente le problème inverse.

Le chapitre 5 est consacré à l'optimiastion de formes. On calcule, essentiellement, les dérivées de formes d'ordre un des fonctions d'état et les dérivées de formes d'ordre un et d'ordre deux de la fonctionnelle coût. On présente aussi un résultat d'identifiabilité et un résultat de compacité de l'opérateur de Riesz correspondant au Hessien de forme de la fonctionnelle en un point critique. Ceci prouve que le problème inverse est mal posé.

Dans le chapitre 6, on présente les résultats des expériences numériques. Puisque le problème est sévèrement mal posé, on a besoin de méthodes de régularisation pour le résoudre numériquement.

Finalement, on donne, en Annexe, quelques résultats sur l'existence et la régularité local de la solution pour le problème de Stockes avec des conditions mixtes sur le bord.

Chapitre 1

Préliminaires et théorie générale

1.1 Notions de base

1.1.1 Espace de Sobolev

Définition 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On pose*

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., N\}.$$

Bien entendu, la dérivation est à comprendre au sens des distributions, En d'autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$ s'il existe des fonctions $v_1, ..., v_N$ dans $L^2(\Omega)$ telles que :

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \quad \forall i = 1, ..., N.$$

On sait, d'aprés l'étude des distributions, que les fonctions v_i sont alors notées $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\begin{aligned} \| u \|_{H^1} &:= \left(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pour la topologie induite par cette norme, une suite $(u_n)_n$ de $H^1(\Omega)$ converge vers $u \in H^1(\Omega)$ si $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $i = 1, ..., N$. La norme de $H^1(\Omega)$ est issue d'un produit scalaire noté $(u, v)_{H^1}$ et défini par :

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1} &:= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega u(x) v(x) dx \\ &= \int_\Omega \nabla u(x) . \nabla v(x) dx + \int_\Omega u(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Proposition 1 *L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\| \cdot \|_{H^1}$ est un espace de Hilbert.*

De la même façon que dans la définition précédente, on définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ où m est un entier strictement positif par :

$$H^m(\Omega) := \{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^N \, , |\alpha| \leq m \}$$

où

$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ multi-indice avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i = 1, ..., N$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$

$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \partial x_d^{\alpha_d}} u$ α-ième dérivée partielle.

On le munit de la norme naturelle :

$$\| u \|_{H^m} := \left(\sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u| \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme dans le cas $m = 1$ on a :

Proposition 2 *L'espace* $H^m(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_{H^m}$ *est un espace de Hilbert.*

Dans la cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, il est possible de définir les espaces de sobolev en utilisant la transformée de fourier. Si $u \in S'(\mathbb{R}^N)$, on note $\hat{u}$ sa tranformée de fourier et on a :

Proposition 3 *L'espace* $H^m(\mathbb{R}^N)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ *peut être défini par :*

$$H^m(\mathbb{R}^N) := \{u \in S'(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

et la norme définie précédemment sur $H^m(\Omega)$ *est équivalente à (on garde la même notation) :*

$$\|u\|_{H^m} := \left(\int_\Omega (1 + |\xi|^2)^m \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette proposition permet de définir l'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$ (et plus seulement $m \in \mathbb{N}^*$).

Remarque 1.1 *De façon plus générale, pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *et pour tout* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, *on peut définir les espaces de sobolev :*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \, , |\alpha| \, \leq m\}$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{\alpha:|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

On montre que ces espaces sont des espaces de Banach .
On a $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Définition de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $H^{-1/2}(\partial\Omega)$:

Soit Ω un ouvert borné de C^2. On sait qu'il existe un opérateur linéaire continu

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{_0}: & H^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\partial\Omega) \qquad (Opérateur\ trace) \\ & u & \longrightarrow & \gamma_{_0}u = u_{/\partial\Omega} \end{array}$$

$\forall u \in H^1(\Omega)$ qui est de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$.

On a :

- $\text{Ker}\gamma_{_0} = \left\{u \in H^1(\Omega) \ / \ \gamma_{_0}u = 0\right\} = \{u \in H^1(\Omega) \ / \ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} = H_0^1(\Omega)$
- On pose par définition $\gamma_{_0}(H^1(\Omega)) := H^{1/2}(\partial\Omega)$

$\gamma_{_0}(H^1(\Omega))$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$ (i.e $\overline{H^{1/2}(\partial\Omega)} = L^2(\partial\Omega)$.

Soit $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Puisque $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ alors $L^2(\partial\Omega) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$

1.1.2 Opérateurs différentiels

Soit N un entier, on note $x = (x_1, ..., x_N)$ un vecteur de $\mathbb{R}^N$. En pratique $N = 2$ ou 3.

Définition 1.2 *On appelle* ***champ de vecteurs*** *une application* $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$*, qui à* $x = (x_1, ..., x_N)$ *associe* $h(x) = (h_1(x), ..., h_N(x))$.

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$*, son* ***gradient*** *est le champ de vecteurs défini par* $\nabla u(x) = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N}(x))$.

Pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$*, on appelle* ***divergence*** *la fonction* $\text{div}\, v(x) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + ... + \dfrac{\partial v_N}{\partial x_N}(x)$.

On appelle ***Laplacien*** *d'une fonction* $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction* $\Delta u(x) = \text{div}(\nabla u(x)) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}(x)$.

Définition 1.3 *On appelle* ***normale*** *au domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un champ de vecteurs $n(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ de Ω et tel qu'en tout point $x \in \partial\Omega$ où le bord est régulier, $n(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire ($\| n(x) \| = 1$).*

On appelle ***normale extérieure*** *une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.*

On appelle ***dérivée normale*** *d'une fonction régulière u sur le bord d'un domaine Ω la fonction définie sur les points réguliers de $\partial\Omega$ par $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u(x) \cdot n(x)$ (produit scalaire du vecteur $\nabla u(x)$ avec le vecteur $n(x)$).*

1.1.3 Domaine de frontière régulière

On rappelle la notion de régularité de la frontière d'un domaine dans la définition suivantre :

Definition 4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On dit que la frontière de Ω notée Γ, est continue (resp. Lipschitzienne, de classe C^k, pour tout $k \geq 0$), si pour chaque $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V_x de x dans $\mathbb{R}^N$ et un nouveau système de coordonnées $y = (y', y_N)$ avec $y' = (y_1, ..., y_{N-1})$ tels que*

1. *V_x est un hypercube dans ce nouveau système de coordonnées, i.e. :*

$$V_x = \{y, \ -a_i < y_i < a_i \ , \ i \in \{1, \quad , N\}\}$$

2. il existe une fonction φ continue (resp. Lipschitzienne, de classe C^k) définie sur

$$V'_x = \{y', \ -a_i < y_i < a_i \ , \ i \in \{1, \quad , N\}\} \ , \text{ vérifiant}$$

$$\text{pour tout } \ y\prime \in V'_x, \ \ |\varphi(y')| \leq \frac{a_N}{2},$$
$$\Omega \cap V_x = \{y, \ y_N < \varphi(y')\} \ , \ \Gamma \cap V_x = \{y, \ y_N = \varphi(y')\}$$

1.1.4 Formule de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des EDP. Elle coincide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Théorème 1.1 *(**Formule de Green**) Soit D un ouvert régulier de classe C^1. Soit w une fonction de $C^1(\overline{D})$ à support borné dans le fermé $\overline{D}$. Alors elle vérifie la formule de Green*

$$\int_D \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial D} w(x)n_i(x)ds, \tag{1.1}$$

où n_i est la i-ème composante de la normale extérieure unitaire de D.

Ce théorème a de nombreux corollaires qui sont tous des conséquences immédiates de la formule de Green.

Corollaire 1.1 *(**Formule d'intégration par parties**)Soit D un ouvert régulier de classe C^1. Soient u et v deux fonctions de $C^1(\overline{D})$ à support borné dans le fermé $\overline{D}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties*

$$\int_D u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_D v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial D} u(x)v(x)n_i(x)ds.$$

Démonstration. Il suffit de prendre $w = uv$ dans la formule de Green (1.1) ■

Corollaire 1.2 *Soit D un ouvert régulier de classe C^1. Soit u une fonction de $C^2(\overline{D})$ et v une fonctions de $C^1(\overline{D})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\overline{D}$.Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties*

$$\int_D \Delta u(x)v(x)dx = -\int_D \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds$$

où $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq N}$ est le vecteur gradient de u, et $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$.

Démonstration. On applique le corollaire (1.1) à v et $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ et on somme en i. ■

Remarque 1.2 *On déduit de la formule de Green (1.1) la formule de stokes*

$$\int_D \operatorname{div} \sigma(x)\phi(x)dx = -\int_D \sigma(x)\cdot\nabla\phi(x)dx + \int_{\partial D} \sigma(x)\cdot n(x)\phi(x)ds$$

où ϕ est une fonction scalaire de $C^1(\overline{D})$ et σ une fonction à valeurs vectorielles de $C^1(\overline{D})$, à supports bornés dans le fermé $\overline{D}$.

1.1.5 Formulation variationnelle

L'exemple prototype d'équation aux dérivées partielles de type elliptique sera le Laplacien pour lequel on a le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction dite test, puis on procède à des intégrations par parties.

Pour simplifier la présentation, on suppose que l'ouvert Ω est borné et régulier et que le second membre f de (1.2) est continu sur $\overline{\Omega}$. Le résultat principal est la proposition suivante.

Proposition 5 *Soit v une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$. Soit X l'espace défini par :*

$$X = \left\{\phi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

Alors u est une solution du problème aux limites (1.2)si et seulement si u appartient

à X et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \quad \textit{pour toute fonction } v \in X. \tag{1.3}$$

L'égalité (1.3)est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites (1.2)

Remarque 1.3 *Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (1.3) est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ contrairement à la formulation "classique" (1.2) qui requiert que u appartienne à $C^2(\overline{\Omega})$. On pressent donc déja qu'il est plus simple de résoudre (1.3) que (1.2) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution. Dans la formulation variationnelle (1.3) la fonction v est appelée fonction test. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (1.2). En mécanique la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité.*

Lorsqu'on prend $v = u$ dans (1.3) on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stokée dans le domaine Ω (le terme de gauche de (1.3) et une énergie potentielle associée à f (le terme de droite de (1.3).

Démonstration. Si u est solution du problème aux limites (1.2) , on multiplie l'équation par $v \in X$ et on utilise la formule d'intégration par parties du corollaire (1.2)

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x) dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds$$

Or $v = 0$ sur $\partial\Omega$ puisque $v \in X$, donc :

$$\int_\Omega f(x) v(x) dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

qui n'est rien d'autre que la formule (1.3). Réciproquement, si $u \in X$ vérifie (1.3), en utilisant "à l'envers" la formule d'intégration par parties précédente on obtient :

$$\int_\Omega (\Delta u(x) + f(x))v(x)dx = 0 \quad \text{pour toute fonction } v \in X.$$

Comme $(\Delta u + f)$ est une fonction continue, grâce au lemme (1.1) ci-dessous, on conclut que $-\Delta u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Par ailleurs, comme $u \in X$, on retrouve la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire que u est solution du problème aux limites (1.2) ■

Lemme 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $g(x)$ une fonction continue dans Ω. Si pour toute fonction ϕ de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω, on a :*

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)dx = 0,$$

alors la fonction g est nulle dans Ω.

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $g(x_0) > 0$ (sinon on prend $-g$). Par continuité, il existe un petit voisinage ouvert $\omega \subset \Omega$ de x_0 tel que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \omega$. Soit alors une fonction test positive, non nulle, ϕ à support inclus dans ω. On a :

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)dx = \int_\omega g(x)\phi(x)dx = 0,$$

qui est une contradiction avec l'hypothèse sur g. Donc $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$ ■

Remarque 1.4 *En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle (1.3) sous la forme : trouver $u \in X$ tel que*

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in X,$$

avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx,$$

où $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur X et $L(.)$ est une forme linéaire sur X. C'est sous cette forme abstraite qu'on résoud (avec quelques hypothèses) la formulation variationnelle L'idée principale de ***l'approche variationnelle*** *est de montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (1.3), ce qui entraînera le même résultat pour l'équation (1.2) à cause de la proposition (5). Néanmoins cette théorie ne fonctionne que si l'espace dans lequel on cherche la solution et dans lequel on prend les fonctions tests (dans les notations précédantes, l'espace X) est un espace de Hilbert, ce qui n'est pas le cas pour $X = \left\{v \in C^1(\overline{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$ muni du produit scalaire "naturel" pour ce problème. La principale difficulté dans l'application de l'approche variationnelle sera donc qu'il faudra utiliser un autre espace que X, à savoir l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ qui est bien un espace de Hilbert.*

1.1.6 Théorèmes fondamentaux

Théorème 1.2 ***(Théorème de Lax-Milgram)***

Soit H un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire sur H, L une forme linéaire sur H. On suppose que

1. a est continue : $\forall u, v \in H$, $|a(u,v)| \leq \|a\| \|u\|_H \|v\|_H$

2. a est coercive : il existe $\alpha > 0$ tel que :$\forall u \in H$, $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2$

3. L est continue : $\forall u \in H$, $|L(u)| \cdot \leq \|L\| \|u\|_H^2$

Alors, il existe un unique u dans H qui vérifie : $\forall v \in H$, $a(u,v) = L(v)$,

et celui-ci vérifie : $\|u\|_H \leq \dfrac{\|L\|}{\alpha}$

Si de plus a est symétrique, alors u est aussi l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v$$

Théorème 1.3 ***(Inégalité de Poincaré)***

Soit Ω un ouvert borné connexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

En conséquence de quoi, l'application $u \longrightarrow \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle.

Il existe de nombreuses variantes de ce résultat, dont les plus utiles sont peut-être les suivantes :

Théorème 1.4 *Soit Ω un ouvert borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^N$.*

1. Soit Γ_D une partie fermée d'intérieur non vide dans $\partial\Omega$- (pour la topologie induite). On note

$$H_D^1(\Omega) := \left\{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0 u = u_{/\partial\Omega} = 0 \text{ sur } \Gamma_D\right\}$$

Alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \forall u \in H_D^1(\Omega)$$

2. On note

$$H_m^1(\Omega) := \left\{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0\right\}$$

Alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \forall u \in H_m^1(\Omega)$$

Ce résultat est la conséquence d'une inégalité de Poincaré "abstraite" qui s'écrit :

Théorème 1.5 *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$. Soit $L : H^1(\Omega) \longrightarrow F$ une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans un Banach F qui ne s'annule pas sur les fonctions constantes non nulles. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|L(u)\|_F)$$

Autrement dit l'application $u \longrightarrow \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|L(u)\|_F$ est une norme sur $H^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle.

Théorème 1.6 ***(Formule de Hadamard)***

Soit Φ vérifiant

$$\Phi : t \in [0, T\ [\longrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ dérivable en } 0 \text{ avec } \Phi(0) = I\ ,\ \Phi'(0) = V$$

On suppose que

$$t \in [0, T\ [\longrightarrow f(t) \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ dérivable en } 0 \text{ (de dérivée } f'(0)),$$

$$f(0) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$$

Alors $t \longrightarrow I(t) = \int_{\Omega_t} f(t)$ est dérivable en 0 et on a

$$I'(0) = \int_\Omega f'(0) + \operatorname{div}[f(0)V]$$

Si de plus, Ω est un ouvert à bord Lipschitzien, alors

$$I'(0) = \int_\Omega f'(0) + \int_{\partial\Omega} f(0) n.V$$

1.1.7 Dérivation par rapport au domaine

On peut écrire des conditions d'optimalité, du premier et du deuxième ordre pour des fonctionnelles de forme. Comme dans tout problème d'optimisation, elles ont plusieurs objectifs. Tout d'abord, elles permettent d'obtenir des renseignements intéréssants sur le minimum et aident à le déterminer. Ainsi, on sait qu'en dimension finie, une des méthodes de recherche du minimum d'une fonctionnelle $J : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ consiste à résoudre l'équation (nonlinéaire en général) $\nabla J(x) = 0$ dans $\mathbb{R}^N$, puis à faire le tri parmi les solutions pour trouver celles correspondant au minimum. Quand la variable est une forme, cette équation conduit en général à un problème à frontière libre dit surdéterminé au sens où, en plus de l'équation d'état, qui est à elle seule un problème bien posé, la condition d'optimalité fournit une équation supplémentaire que doit vérifier la solution du problème sur le bord du domaine.

En dimension finie, pour déterminer numériquement le minimum d'une fonctionnelle, on peut utiliser les approches suivantes :

-Résoudre le système d'équation $\nabla J(x) = 0$, par exemple par une méthode de Newton, ce qui nécessite alors de dériver une fois de plus J et de faire intervenir le Hessien ou matrice des dérivées secondes de J

-Utiliser une méthode de descente de type gradient ou "quasi-Newton", chacune nécessitant le calcul de la dérivée de J à chaque itération.

L'approche est globalement la même pour calculer des formes optimales.

De même, les conditions d'ordre deux permettent d'analyser si une forme critique(c'est-à-dire annulant la dérivée première), possède une dérivée seconde positive ou non afin de détecter si cette forme est minimale, comme en calcul variationnel classique.

Pour toutes ces raisons, et d'autre encore, il est important de pouvoir disposer de la dérivée (ou différentielle) de la fonctionnelle qu'on souhaite minimiser. Mais, ce n'est pas chose facile pour une fonctionnelle de forme. En effet, la notion classique de différentiabilité requiert un cadre d'espace vectoriel normé, ce qui n'est pas le cas de l'ensemble des ouverts

ou des domaines de $\mathbb{R}^N$.

Quel que soit le point de vue, il est nécessaire de contourner la difficulté suivante : naturellement, les fonctions en jeu sont définies sur le domaine variable Ω_t (où $\Omega_t = \Phi(t)(\Omega) = (I + tV)(\Omega), V$ est un champ de vecteurs régulier de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$) et ne sont pas à priori définies sur un même domaine pour t petit. Par exemple, comment peut-on dériver une fonction $t \longrightarrow u_t \in H^1(\Omega_t)$ où Ω_t est un ouvert variable ?

- Si u_t admet un prolongement "naturel" à $\mathbb{R}^N$, on utilisera la dérivée de son prolongement : c'est le cas par exemple si $u_t \in H_0^1(\Omega_t)$ (prolongée par 0)

- La fonction $v_t = u_t \circ \Phi(t)$ est toujours définie sur le domaine fixe Ω.

Dans l'exemple ci-dessus, elle appartient à l'espace fixe $H^1(\Omega)$ (on suppose Φ régulier) et on peut donc s'intéresser à la dérivabilité de $t \longrightarrow v_t \in H^1(\Omega)$.

Intégrales sur un domaine variable

On considère des intégrales de la forme

$$t \longrightarrow I(t) = \int_{\Omega_t} f(t,x)dx,$$

où $\Omega_t = \Phi(t,\Omega)$ est l'image d'un ensemble mesurable fixe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ par un difféomorphisme variable $\Phi(t,\cdot) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ défini pour $t \in [0,T[$ avec $\forall y \in \mathbb{R}^N, \Phi(0,y) = y$. Ce calcul se fait par changement de variable en posant $x = \Phi(t,y), y \in \Omega$ de telle sorte que :

$$I(t) = \int_{\Omega} f(t,\Phi(t,y))J(t,y)dy,$$

où $J(t,y) = \det(D_y\Phi(t,y))$ est le jacobien de $\Phi(t,\cdot)$, c'est à dire le déterminant de la différentielle en y de $\Phi(t,\cdot)$ (ici $\Phi(t)$ est voisin de l'identité et $\det(D_y\Phi(t,y)) > 0$). L'avantage est que le domaine est maintenant fixe.

1.1.8 Dérivée matérielle et dérivée de forme

On considère la transformation suivante :

$$T_t : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad \text{telle que } T_t(x) = x + t\ h(x)$$

où t est un réél et h est un champ de déformation appartenant à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

Définition 1.4 (Dérivée matérielle) *Soit $u \in H^1(\Omega)$ une fonction définie dans un domaine fixe Ω. On note $\Omega_t = T_t(\Omega)$ et $u_t \in H^1(\Omega_t)$. La fonction $u_t \circ T_t$ est définie dans le domaine fixe Ω. La dérivée matérielle est donnée par*

$$\dot{u}(x) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{u_t \circ T_t(x) - u(x)}{t} \qquad \forall x \in \Omega.$$

Définition 1.5 (Dérivée de forme) *La dérivée de forme est donnée par :*

$$u' = \dot{u} - \nabla u.h.$$

1.1.9 Tenseurs

σ est le tenseur de contrainte défini par $\sigma(u,p) = \mu(\nabla u +^t \nabla u) - pI$.

1.2 Rappels théoriques

1.2.1 Problème de Stokes

Soit le problème de Stokes suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \text{div } u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ u &= f \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné, $\omega \subset \Omega$ est un ouvert connexe et $\mu > 0$ représente la constante de viscosité cinématique du fluide.

Réécriture du problème original

Soit u la solution du problème suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \text{div}\,\sigma(u,p) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \text{div}\,u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ u &= f \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \end{cases}$$

σ étant le tenseur de contrainte défini par $\sigma(u,p) = \mu(\nabla u +^t \nabla u) - pI$.

On définit la dérivée conormale par :

$$\partial_n u - pn = \frac{\partial u}{\partial n} - pn$$

où n est la normale extérieure de $\partial\Omega$ et $\partial_{\mathbf{n}} u = (\nabla u +^t \nabla u)n$ est la dérivé normale.

Formulation des probmème de Dirichlet et de Neumann

On définit deux problèmes, un problème de Dirichlet et un problème de Neumann.

Problème de Dirichlet : C'est le cas où les valeurs de la solution sont fixées sur la frontière extérieure .Soit $u = f$ sur $\partial\Omega$, on obtient le problème de Dirichlet et on note u_D la solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ u &= f \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \end{cases}$$

Problème de Neumann Il s'agit du problème où les conditions aux limites sur $\partial\Omega$ portent sur la dérivée conormale de la solution. Ces conditions modélisent la donnée physique d'une force ou d'un flux sur $\partial\Omega$. On fixe donc le flux $\partial_n u - pn = g$ sur la frontière extérieure, on obtient le problème de Neumann et on note u_N la solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \partial_n u - pn &= g \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \end{cases}$$

Chapitre 2

Contrôlabilité approchée avec contrainte sur le Contrôle

2.1 Position du problème

2.1.1 Formulation du problème

Soient Ω un sous ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) avec un bord Γ de classe C^2, $T > 0$, et soit ω un sous ensemble ouvert et non vide de Ω. On pose $Q = \Omega \times (0, T)$ et $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. On considère l'équation d'évolution parabolique :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} -q' - \Delta q & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ q & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ q(T) & = & h + k\chi_\omega & \text{dans} & \Omega, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

où $(.)'$ est la dérivée partielle par rapport au temps t, $h \in L^2(\Omega), k \in L^2(\omega)$ et χ_ω désigne la fonction caractéristique de ω. Il est bien connu que le problème (2.1) admet une solution unique $q \in H^{2,1}(Q)$ (voir par exemple [29], [30])

Remarque 2.1 *Le système (2.1) est un problème parabolique. Il apparaît sous cette forme*

dans la théorie des sentinelles de J.L Lions comme l'état adjoint associé. (voir [31, p 22]. Voir aussi ci-dessous dans la section "Caractérisation du controle optimal").

On utilisera la notation

$$q = q(x, t; k) \tag{2.2}$$

pour dire que la solution q de (2.1) dépend de la commande k qui joue un rôle particulier. Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$, on aimerait choisir k dans le but d'atteindre l'objectif suivant : soit h une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$, $l_0 \in L^2(\omega)$ et

$$\mathcal{M} \text{ un sous-espace vectoriel réel fermé de } L^2(\omega). \tag{2.3}$$

En désignant par $\mathcal{M}^\perp$ le sous-espace orthogonal de $\mathcal{M}$ dans $L^2(\omega)$, on recherche une commande variable $k \in L^2(\omega)$ telle que

$$k \in \mathcal{M}^\perp \tag{2.4}$$

et telle que si $q = q(x, t, k)$ est la solution unique de (2.1), alors

$$\|q(., 0; k) + l_0\chi_\omega\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \quad \text{ dans } \ \Omega \tag{2.5}$$

et

$$\|k\|_{L^2(\omega)} = \text{ minimum} \tag{2.6}$$

ce qui signifie que k est le contrôle de norme minimale dans $L^2(\omega)$. Le rôle de k est de garantir la propriété de contrôlabilité approchée (2.5) en présence du terme h sous la restriction (2.4).

Le problème de contrôlabilité approchée (2.1), (2.4)) et (2.5) est un problème de contrôlabilité par la condition initiale. Les problèmes de contrôlabilité interne ou frontière ont été étudiés par plusieurs auteurs utilisant des méthodes différentes. On se réfère à, C.

Fabre et al. [20], J. P Puel [46]], E. Zuazua [45].

Pour le cas qui nous intéresse et au meilleur de notre connaissance, cette étude est la première traitant du cas $\mathcal{M} \neq \{0\}$. On étudie le cas où $\mathcal{M}$ est de dimension finie. Dans ce cas, certaines conditions de compatibilité sont nécessaires pour avoir la contrôlabilité.

On rencontre ce problème dans la notion de sentinelle discriminante instantanée avec l'observation à l'instant $t = 0$ et $t = T$.

2.2 Contrôlabilité approchée avec contraintes

Le résultat principal est le suivant

Théorème 2.1 *Pour $\varepsilon > 0$, $h \in L^2(\Omega)$ et $l_0 \in L^2(\omega)$, il existe un contrôle k et un état q tels que (2.1), (2.4) et (2.5) sont vérifiées. En outre, il existe un unique couple $(\widehat{k}_\varepsilon, \widehat{q}_\varepsilon)$ avec $\widehat{k}_\varepsilon$ de norme minimale dans $L^2(\omega)$, c'est à dire tel que (2.1), (2.4), (2.5) et (2.6) sont vérifiées.*

L'outil principal pour la démonstration de ce théorème est le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Soit $m \in \mathcal{M}$. Alors, il n'existe pas de $\varphi \in L^2(Q)$ / φ non nulle et vérifiant*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \varphi' - \Delta\varphi & = & 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(T)\chi_\omega & = & m\chi_\omega. & \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Démonstration. Si le problème (2.7) admet une solution, alors elle est donnée par

$$\varphi(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(T) w_j(x) \tag{2.8}$$

où w_j sont des fonctions propres de

$$\left\{\begin{array}{rcccc} -\Delta w & = & \lambda w & \text{dans} & \Omega \\ w & = & 0 & \text{sur} & \Gamma. \end{array}\right. \tag{2.9}$$

On différencie la solution (2.8) une fois par rapport à t, et deux fois par rapport à x et on remplace ces dérivées dans la première équation de (2.7). On obtient alors

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j'(t)+\lambda_j\alpha_j(T))w_j(x)=0. \tag{2.10}$$

Ainsi,

$$\alpha_j'(T)+\lambda_j\alpha_j(T)=0 \tag{2.11}$$

parce que (w_j) forme une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. En outre, la fonction φ satisfait les conditions aux limites, si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(T)w_j(x)=m\chi_\omega \tag{2.12}$$

Comme $m\chi_\omega \in L^2(\Omega)$ donc

$$m\chi_\omega=\sum_{j=1}^{\infty}\langle m\chi_\omega, w_j\rangle_{L^2(\Omega)}\, w_j(x). \tag{2.13}$$

Par conséquent,

$$\alpha_j(T)=\langle m\chi_\omega, w_j\rangle_{L^2(\Omega)}\,. \tag{2.14}$$

Enfin, on a

$$\left\{\begin{array}{rcccc} \alpha_j'(T)+\lambda_j\alpha_j(T) & = & 0 & \text{dans} & (0,T) \\ \alpha_j(T) & = & \langle m\chi_\omega, w_j\rangle_{L^2(\Omega)}\,. & & \end{array}\right. \tag{2.15}$$

Donc la solution de l'équation différentielle du premier ordre linéaire est donnée par

$$\alpha_j(T) = \langle m\chi_\omega, w_j\rangle_{L^2(\Omega)}\, e^{\lambda_j(T-t)}. \tag{2.16}$$

Par conséquent, si le problème (2.7) admet une solution, elle est nécessairement de la forme :

$$\varphi(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle m\chi_\omega, w_j\rangle_{L^2(\Omega)}\, e^{\lambda_j(T-t)} w_j(x).$$

On montre maintenant que $\varphi \notin L^2(Q)$. En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^T |\alpha_j(T)|^2\, dt &= \left|\langle m\chi_\omega, w_j\rangle_{L^2(\Omega)}\right|^2 \int_0^T e^{2\lambda_j(T-t)} dt \\ &= \left|\langle m\chi_\omega, w_j\rangle_{L^2(\Omega)}\right|^2 \left[\frac{-1}{2\lambda_j} + \frac{1}{2\lambda_j} e^{2\lambda_j T}\right]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Mais, λ_j est la valeur propre du problème (2.9), alors $\lambda_j \underset{j\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \infty$. Par conséquent

$$\int_0^T |\alpha_j(T)|^2\, dt \underset{j\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{2.18}$$

ce qui signifie que la série de terme général $\alpha_j(t)$ n'est pas normalement convergente donc le problème (2.7) n'admet pas de solution. ■

Démonstration. (Théorème 2.1)

Soit q une solution du système (2.1) et q_1 une solution du système suivant :

$$\begin{cases} L^* q_1 = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \\ q_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ q_1(T) = h \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

où L^* est l'opérateur différentiel adjoint défini par

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta. \tag{2.20}$$

On pose

$$z = q - q_1. \tag{2.21}$$

Alors, z est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} L^*z & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ z & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ z(T) & = & k\chi_\omega & \text{dans} & \Omega. \end{array} \right. \tag{2.22}$$

On introduit maintenant l'ensemble des états atteignables à l'instant $t = 0$ défini par :

$$R(0) = \left\{ z(k,0), \quad k \in \mathcal{M}^\perp \right\}. \tag{2.23}$$

Il est clair que $R(0)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il sera dense dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si son orthogonal dans $L^2(\Omega)$ est réduit à zéro. Comme $\{0\} \subset R(0)^\perp$, il reste à montrer que $R(0)^\perp \subset \{0\}$. Soit $\varphi^0 \in R(0)^\perp$, alors

$$\left\langle \varphi^0, z(0) \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \varphi^0 z(0) dx = 0 \tag{2.24}$$

où z est une solution de (2.22). Il est donc naturel de définir l'adjoint φ de z, c'est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} L\varphi & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ \varphi & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ \varphi(0) & = & \varphi^0 & \text{dans} & \Omega, \end{array} \right.$$

où L est l'opérateur différentiel défini par

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \tag{2.25}$$

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcll} \varphi' - \Delta\varphi & = & 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(0) & = & \varphi^0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.26}$$

Le système (2.26) est un problème classique de l'équation de la chaleur qui a une solution unique $\varphi \in C([0,T]\,; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Maintenant, on multiplie la première équation du système (2.26) par z. Après intégration par parties sur Q, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \int_0^T \int_\Omega \varphi L^* z dx dt + \int_\Omega \varphi(T) z(T) dx - \int_\Omega \varphi(0) z(0) dx \\ & - \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} z d\gamma dt + \int_0^T \int_\Gamma \varphi \frac{\partial z}{\partial \nu} d\gamma dt \end{aligned} \tag{2.27}$$

Comme z et φ sont des solutions de (2.22) et (2.26) respectivement, (2.27) devient

$$\int_\Omega \varphi(T) k \chi_\omega dx - \int_\Omega \varphi^0 z(0) dx = 0. \tag{2.28}$$

Ceci est équivalent à

$$\int_\Omega \varphi(T) k \chi_\omega dx = 0 \qquad \forall k \in \mathcal{M}^\perp, \tag{2.29}$$

parce que, $\varphi^0 \in R(0)^\perp$ et $z(0) \in R(0)$. Enfin, nous avons

$$\varphi(T)\chi_\omega \in \mathcal{M} \tag{2.30}$$

Par conséquent, φ satisfait (2.26) et (2.30) et en appliquant le lemme (2.1), on en déduit que

$$\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T).$$

En conséquence, $\varphi^0 = 0$ ce qui montre que $R(0)^\perp = \{0\}$. ■

2.3 Caractérisation du contrôle optimal

Le système d'optimalité satisfait par $(\widehat{k}_\varepsilon; \widehat{q}_\varepsilon)$ est établi comme suit. On pose

$$P = \text{ l'opérateur de projection orthogonale de } L^2(\omega) \text{ dans } \mathcal{M} \tag{2.31}$$

et pour $\varphi \in L^2(Q)$

$$P\varphi = \text{la projection orthogonale de } \varphi\chi_\omega \tag{2.32}$$

Soit $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ et φ la solution associée de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \varphi' - \Delta\varphi & = & 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(0) & = & \varphi^0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.33}$$

On introduit maintenant la fonctionnelle J_ε définie par

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\varphi^0) &= \frac{1}{2}\int_\omega |\varphi(T) - P(\varphi(T)\chi_\omega)|^2 \, dx + \sqrt{\varepsilon}\left\|\varphi^0\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_\Omega (\varphi(T)h + \varphi^0 l_0 \chi_\omega) dx. \end{aligned} \tag{2.34}$$

On considère le problème sans contrainte suivant :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \min J_\varepsilon(\varphi^0) \\ \varphi^0 \in L^2(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.35}$$

Alors, on a

Théorème 2.2 *Le problème (2.35) a une solution unique $\widehat{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$.En outre, si $\widehat{\varphi}$ 'est la solution de (2.33) associé à $\widehat{\varphi}^0$, alors $(\widehat{k} = \widehat{\varphi}(T)\chi_\omega - P\widehat{\varphi}(T), q)$ est une solution telle que (2.1), (2.4), (2.5) et (2.6) sont vérifiées.*

Dans cette partie, on va caractériser le contrôle optimal en utilisant un résultat de dualité de Fenchel-Rockafellar (voir [18]).

Proposition 6 *La fonctionnelle J_ε définie dans (2.34) est coercive.*

Démonstration. Pour montrer que J_ε est coercive.il suffit de montrer le relation suivante :

$$\lim_{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}\longrightarrow\infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi^0)}{\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \sqrt{\varepsilon} \tag{2.36}$$

Soit $\varphi_j^0 \subset L^2(\Omega)$ une suite de données initiales pour le système adjoint (2.33) avec $\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \infty$.On les normalise comme suit

$$\widetilde{\varphi}_j^0 = \frac{\varphi_j^0(T) - P(\varphi_j^0(T)\chi_\omega)}{\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)}} \tag{2.37}$$

de sorte que $\|\widetilde{\varphi}_j^0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$. D'autre part, soit $\widetilde{\varphi}_j$ la solution de (2.33) avec une donnée initiale $\widetilde{\varphi}_j^0$. Donc, on a

$$\begin{aligned} \frac{J_\varepsilon(\varphi_j^0)}{\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)}} &= \frac{1}{2}\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)} \int_\omega |\widetilde{\varphi}_j(T)|^2 dx + \sqrt{\varepsilon} \\ &\quad + \int_\Omega \widetilde{\varphi}_j(T) h dx + \int_\Omega \frac{P\varphi_j(T)h + \varphi_j^0 l_0 \chi_\omega}{\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)}} dx \end{aligned} \tag{2.38}$$

On montre maintenant que la dernière intégrale dans l'équation (2.38) est bornée. En effet, on sait que φ_j est la solution du problème

$$\begin{cases} L\varphi_j = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \\ \varphi_j = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \varphi_j(0) = \varphi_j^0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.39}$$

En multipliant la première équation du système (2.39) par φ_j puis en intégrant par

parties sur Q, on obtient

$$0 = \int_0^T \int_\Omega L\varphi_j \varphi_j dxdt = \frac{1}{2} \left\|\varphi_j(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} \left\|\varphi_j^0\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla\varphi_j\right\|^2_{L^2(Q)} \tag{2.40}$$

Par l'inégalité de Poincaré, (2.40) devient,

$$C_0 \left\|\varphi_j\right\|^2_{L^2(Q)} \leq \left\|\nabla\varphi_j\right\|^2_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{2} \left\|\varphi_j^0\right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.41}$$

Maintenant, par l'inégalité de Cauchy Schwartz , on trouve

$$\int_\Omega \frac{P\varphi_j(T)h + \varphi_j^0 l_0 \chi_\omega}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} dx \leq C_1 \frac{\left\|\varphi_j\right\|_{L^2(Q)}}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} + \left\|l_0\chi_\omega\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.42}$$

De (2.41), (2.42) et le fait que $l_0\chi_\omega \in L^2(\Omega)$, on conclut que

$$\int_\Omega \frac{P\varphi_j(T)h + \varphi_j^0 l_0 \chi_\omega}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} dx \leq C \tag{2.43}$$

En revenant à la relation (2.38), deux cas peuvent se présenter :

1. $\int_\omega \left|\widetilde{\varphi}_j(T)\right|^2 dx > 0$. Dans ce cas, on obtient immédiatement

$$\frac{J_\varepsilon(\varphi_j^0)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} \left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty \tag{2.44}$$

2. $\int_\omega \left|\widetilde{\varphi}_j(T)\right|^2 dx = 0$. Dans ce cas, puisque $(\widetilde{\varphi}_j^0)_j$ est bornée dans $L^2(\Omega)$,On peut extraire une sous-suite $(\widetilde{\varphi}_j^0)_j$ telle que

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_j^0 \rightharpoonup \psi^0 & \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega) \\ \widetilde{\varphi}_j \rightharpoonup \psi & \text{faiblement dans} \quad L^2(0,T;H_0^1\Omega)) \end{cases} \tag{2.45}$$

où ψ est solution du système (2.33) avec une donnée initiale ψ^0. En outre, par la

continuité semi inférieure de la norme, on a

$$\int_\omega |\psi(T)|^2\, dx \leq \liminf \int_\omega \left|\widetilde{\varphi}_j(T)\right|^2 dx = 0 \tag{2.46}$$

Par conséquent,

$$\psi(T) = 0 \ \text{ dans } \ \omega \tag{2.47}$$

Et comme ψ est solution de (2.33), et compte tenu de (2.47), on a

$$\psi = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \times (0,T)$$

Ainsi,

$$\widetilde{\varphi}_j \longrightarrow 0 \ \text{ faiblement dans } \ L^2(0,T;H_0^1\Omega)) \tag{2.48}$$

En outre, d'après l'inégalité (2.41), on en déduit que $\left(\dfrac{\varphi_j}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}}\right)_j$ est bornée dans $L^2(0,T;H_0^1\Omega))$. Ainsi

$$\frac{\varphi_j}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} \longrightarrow \xi \ \text{ dans } \ L^2(0,T;H_0^1\Omega)) \tag{2.49}$$

Cela implique que

$$\frac{\varphi_j(T)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} \longrightarrow \xi(T) \ \text{ dans } \ L^2(\Omega)$$

Et comme P est un opérateur compact, alors

$$\frac{P\varphi_j(T)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} \longrightarrow P\xi(T) \ \text{ fortement dans } \ L^2(\omega) \tag{2.50}$$

Mais

$$\widetilde{\varphi}_j = \frac{\varphi_j - P(\varphi_j)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} \longrightarrow 0 \tag{2.51}$$

De (2.49), (2.50) et (2.51), on conclut que

$$P\xi(T) = \xi(T). \tag{2.52}$$

Par conséquent,

$$\xi(T) \in \mathcal{M} \text{ et } L\xi = 0 \text{ dans } L^2(Q) \tag{2.53}$$

Donc d'après le lemme (2.1), on obtient

$$\xi = 0 \text{ dans } Q \tag{2.54}$$

Par conséquent,

$$\frac{P\varphi_j(T)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} \longrightarrow 0 \tag{2.55}$$

Mais,

$$\frac{J_\varepsilon(\varphi_j^0)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} = \left[\sqrt{\varepsilon} + \int_\Omega \widetilde{\varphi}_j(T)h dx + \int_\Omega \frac{P\varphi_j(T)h + \varphi_j^0 l_0 \chi_\omega}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} dx\right] \tag{2.56}$$

Ainsi

$$\liminf_{j\longrightarrow+\infty} \frac{J_\varepsilon(\varphi_j^0)}{\left\|\varphi_j^0\right\|_{L^2(\Omega)}} \geqslant \sqrt{\varepsilon} \tag{2.57}$$

D'où la relation (2.36) est satisfaite. ■

Démonstration. (Théorème 2.2)

Comme J_ε atteint sa valeur minimale à $\widehat{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$, alors, pour tout $\psi^0 \in L^2(\Omega)$ et tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0) \leq J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0 + s\psi^0) \tag{2.58}$$

D'autre part,

$$J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0 + s\psi^0) = \frac{1}{2}\int_\omega |\widehat{\varphi}(T) - P\widehat{\varphi}(T)|^2 dx + \frac{s^2}{2}\int_\omega |\psi(T) - P\psi(T)|^2 dx$$
$$+\sqrt{\varepsilon}\left\|\widehat{\varphi}^0 + s\psi^0\right\|_{L^2(\Omega)} + s\int_\omega (\widehat{\varphi}(T) - P\widehat{\varphi}(T))(\psi(T) - P\psi(T))dx$$

$$+\int_\Omega \left[(\widehat{\varphi}(T) + s\psi(T))h + (\widehat{\varphi}^0 + s\psi^0)l_0\chi_\omega\right] dx \tag{2.59}$$

En substituant (2.59) dans (2.58) et après les simplifications, on trouve

$$0 \leq \sqrt{\varepsilon}\left[\left\|\widehat{\varphi}^0 + s\psi^0\right\|_{L^2(\Omega)} - \left\|\widehat{\varphi}^0\right\|_{L^2(\Omega)}\right] + \frac{s^2}{2}\int_\omega |\psi(T) - P\psi(T)|^2 dx \tag{2.60}$$
$$+s\left[\int_\omega (\widehat{\varphi}(T) - P\widehat{\varphi}(T))(\psi(T) - P\psi(T))dx \right. \tag{2.61}$$
$$\left. + \int_\Omega (\psi(T))h + \psi^0 l_0\chi_\omega)dx\right]. \tag{2.62}$$

D'autre part,

$$\left\|\widehat{\varphi}^0 + s\psi^0\right\|_{L^2(\Omega)} - \left\|\widehat{\varphi}^0\right\|_{L^2(\Omega)} \leq |s|\left\|\psi^0\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.63}$$

De (2.62) et (2.63), on obtient pour tous $\psi^0 \in L^2(\Omega)$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \sqrt{\varepsilon}\,|s|\left\|\psi^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{s^2}{2}\int_\omega |\psi(T) - P\psi(T)|^2 dx$$
$$+s\left[\int_\omega (\widehat{\varphi}(T) - P\widehat{\varphi}(T))(\psi(T) - P\psi(T))dx \right.$$
$$\left. + \int_\Omega (\psi(T))h + \psi^0 l_0\chi_\omega)dx\right].$$

En divisant par $s > 0$ et en passant à la limite $s \longrightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \sqrt{\varepsilon} \left\| \psi^0 \right\|_{L^2(\Omega)} + \int_\omega (\widehat{\varphi}(T) - P\widehat{\varphi}(T))(\psi(T) - P\psi(T))dx \\ & + \int_\Omega (\psi(T))h + \psi^0 l_0 \chi_\omega)dx. \end{aligned}$$

Les mêmes calculs avec $s < 0$ donnent

$$\left| \int_\omega (\widehat{\varphi}(T) - P\widehat{\varphi}(T))\psi(T)dx + \int_\Omega (\psi(T))h + \psi^0 l_0 \chi_\omega)dx \right|$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon} \left\| \psi^0 \right\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \psi^0 \in L^2(\Omega).$$

Aussi, si on prend $\widehat{k} = \widehat{\varphi}(T)\chi_\omega - P\widehat{\varphi}(T)$ dans (2.1) et on multiplie la première équation du système (2.1) par ψ solution de (2.33), on obtient après intégration par parties sur Q,

$$\int_\Omega q(0)\psi^0 dx = \int_\Omega h\psi(T)dx + \int_\omega (\widehat{\varphi}(T) - P\widehat{\varphi}(T))\psi(T)dx \tag{2.64}$$

On obtient des deux dernières relations :

$$\left| \int_\Omega (q(0) + l_0\chi_\omega)\psi^0 dx \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \left\| \psi^0 \right\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \psi^0 \in L^2(\Omega).$$

Par conséquent,

$$\| q(0) + l_0\chi_\omega \|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon} \tag{2.65}$$

■

Chapitre 3

Application aux sentinelles discriminantes instantanées approchées

La notion de sentinelle a été introduite par J.L. Lions pour étudier des systèmes à données incomplètes [31]. Elle est basée sur les considérations suivantes :

- une équation d'état avec des données incomplètes,

- un système d'observations,

- une fonctionnelle appelée une sentinelle et qui permet de distinguer deux types de données manquantes.

Plus précisément, dans la première étape, on considère l'équation linéaire parabolique :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} y' - \Delta y & = & \xi + \lambda\widehat{\xi} & \text{dans} & Q, \\ y & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ y(0) & = & y^0 + \tau\widehat{y}^0 & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

On est intéressé par des systèmes avec des données qui ne sont pas complètement connues. Les fonctions ξ et y^0 sont connues avec ξ dans $L^2(Q)$ et y^0 dans $L^2(\Omega)$. Toutefois,

les termes $\lambda\widehat{\xi}$ et $\tau\widehat{y}^0$ ne sont pas connus, mais sont tels que

$$\begin{cases} \left\|\widehat{\xi}\right\|_{L^2(Q)} \leq 1, \qquad \|\widehat{y}^0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 \\ \text{et que les réels } \lambda \text{ et } \tau \text{ sont suffisamment petits.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Le problème (3.1) admet une solution unique dans $C([0,T], L^2(\Omega))$. Par souci de simplicité, on notera

$$y(x,t;\lambda,\tau) = y(\lambda,\tau)$$

l'unique solution de (3.1). Par conséquent, la fonction

$$\begin{cases} (\lambda,\tau) \longrightarrow y(\lambda,\tau) \\ \text{est dans.} C^1(R\times R; C([0,T], L^2(\Omega))). \end{cases} \tag{3.3}$$

Dans la deuxième étape, on considère l'observation. Plus précisément, on donne un système d'observation, c'est à dire un sous-ensemble non vide ouvert $\mathcal{O}$ de Ω, appelé un observatoire et une observation y_{obs} de l'état y sur $\mathcal{O}\times\{0,T\}$. Si y est une représentation «fidèle» du phénomène étudié, alors $y(\lambda,\tau) = y_{obs}$ sur $\mathcal{O}\times\{0,T\}$.

On suppose que l'observation à l'instant $t=0$ et $t=T$ est bruitée i.e

$$y_{obs}(t=0) = e_o + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \tag{3.4}$$

$$y_{obs}(t=T) = m_o + \sum_{j=1}^{M} \beta_j m_j \tag{3.5}$$

où les fonctions e_o, e_1, , e_N et m_o, m_1, , m_M sont des mesures données de y dans $L^2(\mathcal{O})$, mais où les coefficients réels α_i, β_j sont inconnus. On suppose que α_i, β_j sont petits. On se réfère aux termes $\alpha_i e_i$ et $\beta_j m_j$ comme termes d'interférence. On peut supposer sans perdre de généralité que les fonctions e_i et m_j sont linéairement indépendantes sur $\mathcal{O}$.

Enfin, on introduit maintenant la notion de sentinelle. On donne $h_o \in L^2(\mathcal{O})$, $q^o \in L^2(\Omega)$, et on considère aussi ω un sous-ensemble ouvert non vide de Ω tel que $\omega \subset \overline{\omega} \subset \mathcal{O}$. Pour une variable de commande $(u, v) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$, on pose :

$$\mathcal{S}(\lambda, \tau) = \int_\Omega (h_o \chi_{\mathcal{O}} + v\chi_\omega) y(x, T; \lambda, \tau) dx + \int_\Omega (q^o + u\chi_\omega) y(x, 0; \lambda, \tau) dx \qquad (3.6)$$

où $\chi_{\mathcal{O}}$ et χ_ω sont les fonctions caractéristiques de $\mathcal{O}$ et ω respectivement.

Plus précisément, on cherche (u, v) tel que

(i) $\mathcal{S}$ est stationnaire au premier ordre par rapport aux termes manquants $\tau\widehat{y}^0$, à savoir

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0, 0) = 0, \qquad \forall \widehat{y}^0 \qquad (3.7)$$

(ii) $\mathcal{S}$ est stationnaire par rapport aux termes d'interférence $\alpha_i e_i$, à savoir

$$\int_\Omega q^o e_i dx + \int_\omega u e_i dx = 0, \qquad 1 \leq i \leq N \qquad (3.8)$$

(iii) $\mathcal{S}$ est stationnaire par rapport aux termes d'interférence $\beta_j m_j$, à savoir

$$\int_{\mathcal{O}} h_o m_j dx + \int_\omega v m_j dx = 0, \qquad 1 \leq j \leq M \qquad (3.9)$$

et

(iv) (u, v) est de norme minimale dans $L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ parmi les fonctions de contrôle dans $L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ qui satisfont aux conditions ci-dessus, c'est à dire,

$$\|(u, v)\|_{L^2(\omega) \times L^2(\omega)} = \min . \qquad (3.10)$$

Toute $\mathcal{S}$ telle que (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10) sont vérifiées, est appelée sentinelle discriminante instantanée.

3.1 Equivalence à un problème de contrôlabilité approchée

3.1.1 Insensibilité de $\mathcal{S}$ par rapport aux termes manquants $\tau\widehat{y}^0$

La condition (3.7) est équivalente à :

$$\int_\Omega (h_o\chi_{\mathcal{O}} + v\chi_\omega)y_\tau(T)dx + \int_\Omega (q^o + u\chi_\omega)y_\tau(0)dx = 0 \tag{3.11}$$

où $y_\tau = \dfrac{\partial y}{\partial \tau}(0,0)$ est la solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} Ly_\tau & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ y_\tau & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ y_\tau(0) & = & \widehat{y}^0 & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{3.12}$$

et où L est l'opérateur différentiel défini dans (2.25).

Pour transformer la condition (3.11), on introduit l'état adjoint q solution du problème rétrograde suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} L^*q & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ q & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ q(T) & = & h_o\chi_{\mathcal{O}} + v\chi_\omega & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{3.13}$$

avec L^* est l'opérateur différentiel adjoint défini dans (2.20). Le problème (3.13) admet une unique solution $q \in H^{2,1}(Q)$.

On multiplie la première équation du système (3.13) par y_τ et on intègre par parties sur Q. On trouve

$$\int_\Omega (h_o\chi_{\mathcal{O}} + v\chi_\omega)y_\tau(T)dx = \int_\Omega q(0)\widehat{y}^o dx \qquad \forall \widehat{y}^o \in L^2(\Omega). \tag{3.14}$$

Ainsi, la condition (3.7) (ou (3.11)) est satisfaite si et seulement si

$$q(0) = -(q^o + u\chi_\omega). \tag{3.15}$$

3.1.2 Insensibilité de $\mathcal{S}$ par rapport aux termes de bruit $\alpha_i e_i$

On considère maintenant la condition (3.8). Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $L^2(\omega)$ engendré par les N fonctions linéairement indépendantes $e_i\chi_\omega$. Alors, la condition (3.8) est satisfaite si et seulement si il existe un unique $l_0 \in \mathcal{E}$ tel que

$$u = l_0 + l \quad / \quad l \in \mathcal{E}^\perp \tag{3.16}$$

où $\mathcal{E}^\perp$ est l'orthogonal de $\mathcal{E}$.

3.1.3 Insensibilité de $\mathcal{S}$ par rapport aux termes de bruit $\beta_j m_j$

Pour transformer la condition (3.9), on introduit $\mathcal{M}$ le sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ engendré par les M fonctions linéairement indépendantes $m_i\chi_\omega$. Alors, la condition (3.9) est satisfaite si et seulement si il existe un unique $k_o \in \mathcal{M}$ tel que

$$v = k_o + k \ / \ k \in \mathcal{M}^\perp \tag{3.17}$$

où $\mathcal{M}^\perp$ est l'orthogonal de $\mathcal{M}$.

Par conséquent, le problème de trouver un contrôle $(u, v) \in L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ tel que $(\mathcal{S}, u, v)$ vérifie (3.7)-(3.10) est équivalent à trouver la paire de contrôle (l, k) telle que :

$$l \in \mathcal{E}^\perp \ , \ k \in \mathcal{M}^\perp \tag{3.18}$$

et si q est la solution du système :

$$\begin{cases} L^*q &= 0 & \text{dans} & Q, \\ q &= 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ q(T) &= h + k\chi_\omega & \text{dans} & \Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

où $h = h_o\chi_{\mathcal{O}} + k_o\chi_\omega$

on a

$$q(0) = -(q^o + l_0 + l\chi_\omega), \tag{3.20}$$

avec

$$\|(l,k)\|_{L^2(\omega)\times L^2(\omega)} = \min . \tag{3.21}$$

Remarque 3.1 *On ne peut pas espérer résoudre le problème de la contrôlabilité exacte (3.18)-(3.20). En effet, pour $k \in L^2(\omega)$ la solution de (3.18)-(3.19) est très régulière et de régularité difficile à caractériser. Cela est due à l'effet régulateur de l'équation de la chaleur. Donc, si on prend $(q^o+l_0+l\chi_\omega)$ dans un espace de Sobolev classique (ici $L^2(\Omega)$), il sera inutile de chercher k tel que $q(0) = -(q^o+l_0+l\chi_\omega)$. C'est pourquoi, il est raisonnable de se contenter de la contrôlabilité approchée, ce qui amène tout naturellement à la notion de sentinelle approchée.*

Définition 3.1 *Soit $\varepsilon > 0$. La fonctionnelle $\mathcal{S}$ définie dans (3.6) supposée non nulle est appelée sentinelle discriminante approchée s'il y a un contrôle $(u,v) \in L^2(\omega)\times\ L^2(\omega)$ tel que le triplet $(\mathcal{S},u,v)$ satisfait aux conditions suivantes :*

(i) $\mathcal{S}$ est insensible d'une manière approximative par rapport aux termes manquants $\tau\widehat{y}^0$, à savoir

$$\left|\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau}(0,0)\right| \leq \varepsilon \tag{3.22}$$

(ii) $\mathcal{S}$ est stationnaire par rapport aux termes d'interférence $\alpha_i e_i$, à savoir

$$\int_\Omega q^o e_i dx + \int_\omega u e_i dx = 0, \qquad 1 \leq i \leq N \tag{3.23}$$

(iii) $\mathcal{S}$ *est stationnaire par rapport aux termes d'interférence* $\beta_j m_j$, *à savoir*

$$\int_{\mathcal{O}} h_o m_j dx + \int_{\omega} v m_j dx = 0, \qquad 1 \leq j \leq M \tag{3.24}$$

et

(iv) (u, v) *est de norme minimale dans* $L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ *parmi les fonctions de contrôle dans* $L^2(\omega) \times L^2(\omega)$ *qui remplissent les conditions ci-dessus, à savoir*

$$\|(u, v)\|_{L^2(\omega)\times L^2(\omega)} = \min . \tag{3.25}$$

Enfin, le problème de l'existence d'une sentinelle discriminante instantanée approchée est équivalent au problème suivant : Trouver (l, k) tel que :

$$l \in \mathcal{E}^{\perp} \quad , \quad k \in \mathcal{M}^{\perp} \tag{3.26}$$

et si q est la solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} L^* q & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ q & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ q(T) & = & h + k\chi_\omega & \text{dans} & \Omega, \end{array} \right. \tag{3.27}$$

on a

$$\|q(0) + q^o + l_0 + l\chi_\omega\| \leq \varepsilon, \tag{3.28}$$

avec

$$\|(l, k)\|_{L^2(\omega)\times L^2(\omega)} = \min . \tag{3.29}$$

Remarque 3.2 *Il existe* $l = 0 \in \mathcal{E}^{\perp}$ *satisfaisant (3.26) et (3.28), de sorte que le problème (3.26)-(3.29) se réduit à un problème (2.1), qui a été étudié.*

Chapitre 4

Détection d'inclusion

4.1 Introduction

Optimiser la forme d'un objet afin de le rendre le plus efficace possible ou le plus résistant ou le plus aérodynamique ou le plus léger ou le plus silencieux ou le plus proche d'un idéal visé ou le moins cher possible c'est une activité très ancienne, mais l'avènement des ordinateurs et l'explosion récente de la modélisation et du calcul scientifique ont considérablement renouvelé le sujet en posant toute sorte de nouvelles questions et ont réactivé ce domaine de recherche mathématique identifié sous le nom d'optimisation de forme. On cherche à y trouver des maxima ou des des minima de fonctions, c'est-à-dire à y résoudre et analyser des problèmes du type : trouver ω^* solution de.

$$\omega^* \in D_{ad} \quad , J(\omega^*) = \min_{\omega \in D_{ad}} J(\omega)$$

où D_{ad} est un ensemble de parties de $\mathbb{R}^N$, dites domaines ou formes admissibles, et J une fonctionnelle définie sur D_{ad} à valeur dans $\mathbb{R}$, dite fonctionnelle de forme.

L'objectif est de trouver " la meilleure forme possible" pour un certain problème, c'est-à-dire minimiser un certain " coût ". Les applications sont nombreuses comme, par exemple, dans l'aéronautique (forme d'une aile d'avion), dans l'automobile (forme d'une

pare-brise) ou encore dans l'industrie pétrolière (forme d'une pompe de forage).

La détection d'inclusions et la reconstruction de leur géométries est d'une très grande importance en technologie. Ceci est due à l'importance des informations que peut fournir une reconstruction appropriée comme en imagerie médicale et aussi à la grande diversité des domaines d'application potentiels : contrôle non destructif, industrie du pétrole, physique des radars.....

Le problème d'identification d'une inclusion située à l'intérieur d'un autre domaine de conductivités différentes à partir de mesures frontières est un problème qualifié de problème inverse. C'est un problème modèle pour certaines applications où l'on doit détecter à partir de mesures extérieures l'endroit et la forme des objets qui se distinguent par une conductivité différente de leur milieu environnant.

Le problème inverse classique est le problème bien connu d'impédance tomographique qui a été initialement étudié par *A.P.Calderon* ([12]) en 1980. Il trouve ses origines dans la détection pétrolière en utilisant des méthodes électomagnétiques. De nombreux travaux ont été effectués dans ce domaine par des mathématiciens, citons en particulier *Sylvester* et *Uhlmann* ([51]), *Nachmann* ([39],[40]) et *Novikov* ([44]).

Le but de notre travail est de reconstruire une inclusion ω immergée dans un fluide contenu dans un plus grand domaine borné Ω, par une mesure sur le bord $\partial\Omega$. Ici le mouvement du fluide est supposé être gouverné par les équations de Stokes. On étudie le problème inverse de reconstruction de ω grâce aux méthodes d'optimisation de forme en définissant la fonctionnelle coût Kohn-Vogelius. On caractérise d'abord le gradient de cette fonctionnelle coût pour faire une résolution numérique. Alors afin d'étudier la stabilité de ce problème, on donne l'expression du Hessien de forme. On montre la compacité de l'opérateur de Riesz correspondant à cet Hessien de forme en un point critique ce qui explique pourquoi le problème inverse est mal posé. Ainsi on a besoin d'une régularisation pour résoudre ce problème numériquement.

Donc l'objectif est de détecter à partir de mesures effectuées sur la frontière d'un objet des défauts à l'intérieur de celui ci. Ce problème de contrôle non destructif vise à déterminer la position, la taille et si possible la forme des défauts. Il s'agit d'étendre les résultats de L. Afraites, M. Dambrine et D. Kateb ([2]).

4.2 Etude du problème inverse

Le problème de reconstruction d'une inclusion ω immergée dans un fluide répandu dans un plus grand domaine borné Ω a fait d'objet de recherche de plusieurs auteurs. Dans [3], Alvarez et al. étudient ce problème inverse dans le but de déterminer la forme et la localisation de ω en mesurant la vitesse du fluide et les forces de Cauchy sur le bord $\partial\Omega$. Après, dans [4], Alves et al. utilisent une méthode basée sur l'analyse d'un système d'équations integrales non linéaires afin de déterminer la géométrie et la position d'un objet rigide immergé dans un fluide visqueux et incompressible. Dans un travail plus récent, [14], Conca et al. étudient le problème de détection d'un obstacle qui bouge dans un fluide parfait par une mesure frontière. Quand l'obstacle est une boule, ils montrent que la position et la vitesse de son centre de masse peuvent être identifiées à partir d'une seule mesure frontière. Ils montrent aussi dans [15], en utilisant l'analyse complexe, que ce résultat ne peut être généralisé à n'importe quel solide. Cependant, ils étendent celui-ci à des ellipses qui bougent et ils montrent qu'un solide avec quelques propriétés de symétrie peut être détecté partiellement. Comme on pouvait s'y attendre pour un problème inverse, les expériences numériques qui ont été conduites, montrent les difficultés rencontrées pour reconstruire numériquement l'objet. Ces difficultés numériques sont expliquées dans un papier récent de Badra et al.(voir [7]) où les auteurs montrent, en utilisant une approche moindre carré que le problème est sévèrement mal posé.

Ici le mouvement du fluide est supposé être régi par les équations classiques de Stokes avec une condition non-homogène de Dirichlet surla frontière extérieure et une condition

homogène de Dirichlet surla frontière intérieure. Afin de simplifier l'expression, on suppose que les forces extérieures sont nulles, mais les mêmes résultats valent si l'on ajoute un second élément. Ce problème est classique et a été étudié par de nombreux auteurs en raison de son importance dans de nombreuses applications impliquant les fluides des technologies connexes et reçoit une attention considérable par des ingénieurs et des mathématiciens. Il est connu pour être mal posé et notre objectif est de déterminer quelles sortes d'informations sur la forme à détecter peuvent être récupérées par les outils d'optimisation de forme.

En suivant des travaux antérieurs sur la tomographie d'impédance électrique par Afraite et al. Dans [1] ou [2] et Badra et al. dans [7], on résoud ce problème inverse en minimisant une fonction coût. Dans cette thèse, on considère une autre approche que la fonction coût moindre carré étudiée pour le même problème dans [7]. En effet on montre comment résoudre le problème inverse en définissant la fonction coût Kohn-Vogelius. Ici, on fait la mesure seulement sur une partie de la frontière extérieure et non sur la frontière extérieure toute entière comme dans l'approche classique de Kohn-Vogelius

Donc, on considère ici les équations de Stokes avec des conditions de Dirichlet et des conditions mixtes sur le bord. On donne une formule explicite pour le gradient de cette fonctionnelle et on calcule le Hessien de forme associé pour étudier la stabilité. On montre la compacité de l'opérateur de Riesz correspondant à ce Hessien de forme en un point critique ce qui explique pourquoi le problème inverse est mal posé. Finalement on présente quelques simulations numériques avec une méthode de régularisation : ici on utilise un modèle paramétrique.

Cette partie est organisé comme suit. En première partie, on introduit les notations, le problème surdéterminé qu'on considère et la fonctionnelle coût de Kohn-Vogelius J_{KV} . En seconde partie, on établit les résultats importants de ce travail. On rappelle un important résultat d'identifiabialité établit par Alvarez et al. (voir [3, Théorème 1.2]) qui assure que la fonctionnelle J_{KV} a un minimum global unique. Les dérivées d'ordre 1 de l'état

et de la fonction coût sont caractérisées et le Hessien de forme est explicitement calculé. On montre alors que l'opérateur de Riesz associé au Hessien de forme est compact. Ce résultat explique toutes les difficultés de stabilité auxquelles on a à faire face.

Dans la dernière partie de cette thèse, on présente quelques expériences numériques pour reconstuire effectivement l'inclusion ω en utilisant les informations de dérivées de forme. Les résultats nécessaires sur les équations de Stokes avec des conditions mixtes sur le bord (un théorème d'existence et d'unicité de la solution et un résultat de régularité locale) sont rappelés dans l'annexe B.

4.2.1 Notations générales

On introduit les notations adoptées dans cette thèse. Pour un ouvert borné et Lipschitzien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou 3), on note par $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$ et $H^s(\Omega)$ les espaces de Lebesgue et de Sobolev. On note en gras les fonctions vectorielles et les espaces : $\mathbf{L}^p(\Omega)$,$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$, $\mathbf{H}^s(\Omega)$, etc. On note par $|\Omega|$ la mesure de Ω. De plus, $\mathbf{n}$ représente la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, et pour une fonction u suffisamment régulière, on note $\partial_{\mathbf{n}} u$ la dérivée normale de u :

$$\partial_{\mathbf{n}} u := \nabla u \; n$$

Finalement, on définit l'espace :

$$L^2_0(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega), \int_\Omega p = 0 \right\}.$$

et on rappelle la définition suivante : pour un ouvert $O \subset \partial\Omega$,

$$H^{1/2}_{00}(O) := \left\{ u_{|O}\,,\ u \in H^{1/2}(\partial\Omega), u_{\left|\partial\Omega\setminus\overline{O}\right.} = 0 \right\},$$

On note par $\left[H^{1/2}_{00}\right]'(O)$ l'espace dual de $H^{1/2}_{00}(O)$.

4.2.2 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné, connexe et Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou 3). Soit $d_0 > 0$ fixé (petit). On définit $\mathcal{O}_{d_0}$ l'ensembe de tous les sous ensembles ouverts ω de Ω avec un bord de classe $C^{2,1}$ tel que $d(x, \partial\Omega) > d_0$ pour tout $x \in \omega$ et tel que $\Omega\backslash\overline{\omega}$ est connexe. L'ensemble $\mathcal{O}_{d_0}$ est dit ensemble des géométries admissibles. Notez qu'on a fait l'hypothèse que l'inclusion ω est loin du bord $\partial\Omega$. On définit aussi Ω_{d_0} un ouvert avec un bord C^∞ tel que

$$\{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > d_0/2\} \subset \Omega_{d_0} \subset \{x \in \Omega;\ d(x, \partial\Omega) > d_0/3\}\,.$$

Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ telle que $\mathbf{f} \neq 0$ satisfaisant la condition de compatibilité

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{f}.\mathbf{n} = 0 \tag{4.1}$$

Soit O un sous-ensemble non vide de $\partial\Omega$ et $\mathbf{g} \in \left[\mathbf{H}_{00}^{1/2}\right]'(O)$ une mesure frontière admissible. Pour $\omega \in \mathcal{O}_{d_0}$, on considère le problème aux limites surdéterminé de Stokes suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &=& 0 \quad \text{dans} & \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &=& 0 \quad \text{dans} & \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \mathbf{u} &=& \mathbf{f} \quad \text{sur} & \partial\Omega \\ \mathbf{u} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\omega \\ -\mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} + p\mathbf{n} &=& \mathbf{g} \quad \text{sur} & O \end{array}\right. \tag{4.2}$$

ici la constante $\mu > 0$ représente la viscosité cinématique du fluide, la fonction vectorielle $\mathbf{u}$ représente la vitesse du fluide et la fonction scalaire p représente la pression.

On suppose ici qu'il existe $\omega^* \in \mathcal{O}_{d_0}$ tel que (4.2) a une solution. Ainsi, on considère le problème inverse géométrique suivant :

Trouver $\omega \in \mathcal{O}_{d_0}$et le couple $(\mathbf{u}, p)$ qui satisferaient le système surdéterminé (4.2). (4.3)

On va résoudre le problème inverse de reconstruction de ω grâce aux outils d'optimisation de forme. Afin de retrouver la forme de l'inclusion ω, une stratégie usuelle est donc de minimiser une fonctionnelle coût. Dans ce travail, on a choisi la fonctionnelle coût Kohn-Vogelius suivante :

$$J_{KV}(\omega) := \frac{1}{2}\mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} |\nabla(\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_N)|^2 ,$$

où $(\mathbf{u}_D, p_D) \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega}) \times L^2_0(\Omega\backslash\overline{\omega})$ est l'unique solution du problème de Stokes avec les conditions de Dirichlet sur le bord :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mu\Delta\mathbf{u}_D + \nabla p_D &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \operatorname{div}\mathbf{u}_D &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \mathbf{u}_D &=& \mathbf{f} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \mathbf{u}_D &=& 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \end{array} \right. \tag{4.4}$$

et $(\mathbf{u}_N, p_N) \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega}) \times L^2(\Omega\backslash\overline{\omega})$ est l'unique solution du problème de Stokes avec les conditions mixtes sur le bord :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mu\Delta\mathbf{u}_N + \nabla p_N &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \operatorname{div}\mathbf{u}_N &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ -\mu\partial_n\mathbf{u}_N + p_N\mathbf{n} &=& \mathbf{g} \quad \text{sur} \quad O \\ \mathbf{u}_N &=& \mathbf{f} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\backslash\overline{O} \\ \mathbf{u}_N &=& 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \end{array} \right. \tag{4.5}$$

Voir la référence [9] ou [21] pour les résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution du problème de Stokes avec des conditions de Dirichlet sur le bord. Notez qu'on a supposé que la condition de compatibilité (4.1) associée au problème (4.4) est satisfaite.

Concernant les conditions mixtes sur le bord, on rappelle les résultats importants

utilisés dans ce travail dans l'annexe A.2. Ainsi, l'existence et l'unicité du couple $(\mathbf{u}_N, p_N)$ est garantie par le théorème (A.1)

Donc, on essaye de minimiser la fonctionnelle coût Kohn-Vogelius J_{KV} :

$$\omega^* = \arg\min_{\omega \in \mathcal{O}_{d_0}} J_{KV}(\omega). \tag{4.6}$$

En effet, si ω^* est solution du problème inverse (4.3), alors $J_{KV}(\omega^*) = 0$ et (4.6) a lieu. Inversement, si ω^* est solution de (4.6) avec $J_{KV}(\omega^*) = 0$, alors ce domaine ω^* est une solution du problème inverse.

Introduction des outils fonctionnels

Pour définir les dérivées de forme, on utilisera la méthode de vitesse introduite par Murat et Simon en 1976 dans [34]. Pour cela, on a besoin d'introduire l'espace des déformations admissibles :

$$\mathbf{U} := \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{W}^{3,\infty}(\mathbb{R}^N) : \text{Supp}\boldsymbol{\theta} \subset \bar{\Omega}_{d_0} \right\}.$$

Alors pour $\mathbf{V} \in \mathbf{U}$ et $t \in [0, T)$ (où $T > 0$ est un nombre réel fixé suffisament petit), on définit $\omega_t = (\mathbf{I} + t\mathbf{V})(\omega)$. $\mathbf{V}$ est dite direction de la perturbation et on note

$$V_n := \mathbf{V}.\mathbf{n}$$

Pour les détails concernant la différentiabilité par rapport au domaine, on se refère aux articles de Simon ([48], [49]) et les livres de Henrot et Pierre [24] et de Sokolowski et Zolésio [50].

Chapitre 5

Optimisation de forme

5.1 Introduction

On s'intéresse à la reconstruction du domaine original ω à partir des mesures frontières. L'idée est de résoudre le problème inverse via un problème de minimisation d'une fonctionnelle coût de forme $J(\omega)$ dont l'inconnue est l'inclusion ω. Pour appliquer une méthode de descente afin de minimiser la fonctionnelle coût $J(\omega)$, on a besoin de la dérivée de forme de cette dernière par rapport à une perturbation de domaine ω.

5.2 Optimisation de forme et problème de Stokes

5.2.1 Transformation du problème en un problème d'optimisation de forme

Afin de retrouver la forme de l'inclusion ω, une stratégie habituelle consiste à minimiser une fonction coût. Par conséquent, on définit la fonctionnelle coût de Kohn-Vogelius :

$$J_{KV}(\omega) = \frac{1}{2}\mu \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} |\nabla(\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_N)|^2 .$$

5.2.2 Résultat d'identifiabilité

On considère un résultat d'identifiabilité dans le cas de Dirichlet prouvé par Alvarez et al.[3, Théorème 1.2] Afin de l'établir on précise une notation : on note par σ le tenseur de contrainte défini par :

$$\sigma(\mathbf{u}, p) := \mu(\nabla \mathbf{u} +^t \nabla \mathbf{u}) - pI.$$

Ici ${}^t\nabla\mathbf{u}$ est la matrice transposée de $\nabla\mathbf{u}$.

On note que si $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ dans $\Omega\backslash\overline{\omega}$, on a,

$$-\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}, p)) = -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p \quad \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega},$$

en effet,

si $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, alors $\operatorname{div}^t \nabla\mathbf{u} = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) = 0$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}, p)) &= \operatorname{div}(\mu(\nabla\mathbf{u} +^t \nabla\mathbf{u}) - pI) \\ &= \mu \operatorname{div}\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\mu} \operatorname{div}^t \nabla\mathbf{u} - \nabla p \\ &= \mu\Delta\mathbf{u} - \nabla p \end{aligned}$$

puisque $\operatorname{div}^t \nabla\mathbf{u} = 0$ et $\operatorname{div}\nabla = \Delta$.

Théorème 5.1 *(Alvarez et al., [3]). Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, ($N = 2$ ou 3), un domaine borné de classe $C^{1,1}$, et O un sous-ensemble ouvert et non vide de $\partial\Omega$. Soient*

$$\omega_0, \omega_1 \in \mathcal{D}_{\text{ad}} := \{\omega \subset\subset \Omega : \omega \textit{ est ouvert, Lipschitzien et } \Omega\backslash\bar{\omega} \textit{ est connexe}\}$$

et $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^{3/2}(\partial\Omega)$ avec $\boldsymbol{f} \neq \mathbf{0}$, satisfaisant la condition de flux $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{n} = 0$. Pour $\epsilon_* = 0$

ou $\epsilon_* = 1$, *soit* $(\boldsymbol{u_j}, p_j)$ *pour* $j = 0, 1$, *la solution de*

$$\begin{cases} -\text{div}\,(\sigma(\boldsymbol{u_j}, p_j)) + \epsilon_* \text{div}\,(\boldsymbol{u_j} \otimes \boldsymbol{u_j}) &= \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega_j}, \\ \text{div}\,\boldsymbol{u_j} &= 0 \quad \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega_j}, \\ \boldsymbol{u_j} &= \boldsymbol{f} \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \boldsymbol{u_j} &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\omega_j. \end{cases}$$

On suppose que $(\boldsymbol{u_j}, p_j)$ *sont tels que*

$$\sigma(\boldsymbol{u_0}, p_0)\mathbf{n} = \sigma(\boldsymbol{u}_1, p_1)\mathbf{n} \quad \text{sur } O.$$

Alors $\omega_0 \equiv \omega_1$.

On peut adapter ce résultat à notre problème, *i.e.* avec $-\mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u} + p\mathbf{n}$ au lieu de $\sigma(\boldsymbol{u}, p)\mathbf{n}$,avec $\epsilon_* = 0$, avec Ω Lipschitzien et avec $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ (voir [7, Théorème 2.2]). Ainsi ce résultat affirme que pour un $\boldsymbol{f}$ donné fixé, deux différentes géometries ω_0 and ω_1 dans $\mathcal{O}_{d_0}$ donnent deux différentes mesures $g_{\mathbf{1}}$ et $g_{\mathbf{2}}$. Donc le problème (4.3) admet une unique solution.

5.2.3 Dérivées de forme d'ordre un des fonctions d'état $\mathbf{u}_N$ et $\mathbf{u}_D$

le résultat suivant est basé sur [7, Propositions 2.1 et 2.5] et assure que les solutions $(\mathbf{u}_D, p_D)$ et $(\mathbf{u}_N, p_N)$ sont différentiables par rapport au domaine. De plus on caractérise les dérivées de forme de ces solutions.

Proposition 7 *Soit* $\mathbf{V} \in \mathbf{U}$ *une déformation admissible. Les solutions* $(\mathbf{u}_D, p_D)$ *et* $(\mathbf{u}_N, p_N)$ *sont différentiables par rapport au domaine et les dérivées de forme* $(\mathbf{u}'_D, p'_D)$ *et* $(\mathbf{u}'_N, p'_N)$ *appartiennent à* $\mathbf{H}^2(\Omega_{d_0}\backslash\overline{\omega}) \times \mathbf{H}^1(\Omega_{d_0}\backslash\overline{\omega})$. *Les couples* $(\mathbf{u}'_D, p'_D) \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega}) \times L^2_0(\Omega\backslash\overline{\omega})$ *et* $(\mathbf{u}'_N, p'_N) \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega}) \times L^2(\Omega\backslash\overline{\omega})$ *sont respectivement les seules solutions des problèmes*

aux limites suivants :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u}'_D + \nabla p'_D &= 0 & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}'_D) &= 0 & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega}, \\ \mathbf{u}'_D &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}'_D &= -V_n\partial_n\mathbf{u}_D & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \tag{5.1}$$

et

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u}'_N + \nabla p'_N &= 0 & \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}'_N) &= 0 & \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ -\mu\partial_n\mathbf{u}'_N + p'_N\mathbf{n} &= 0 & \text{sur} \quad O \\ \mathbf{u}'_N &= 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\backslash\overline{O} \\ \mathbf{u}'_N &= -V_n\partial_n\mathbf{u}_N & \text{sur} \quad \partial\omega \end{cases} \tag{5.2}$$

5.2.4 Dérivée de forme d'ordre un de la fonctionnelle Kohn-Vogelius

On définit la fonctionnelle coût Kohn-Vogelius :

$$J_{KV}(\omega) = \frac{1}{2}\mu\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} |\nabla(\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_N)|^2$$

Pour simplifier les expressions, on utilise les notations suivantes :

$$w := \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_N \qquad \text{et} \qquad q := p_D - p_N \tag{5.3}$$

où ($\mathbf{u}_D$,p_D) est solution de (4.4) et ($\mathbf{u}_N, p_N$) est solution de (4.5),

et

$$\mathbf{w}' := \mathbf{u}'_D - \mathbf{u}'_N \quad \text{et} \quad q' := p'_D - p'_N \tag{5.4}$$

où $(\mathbf{u}'_D, p'_D)$ est solution de (5.1) et $(\mathbf{u}'_N, p'_N)$ est solution de (5.2).

Proposition 8 *Pour $\mathbf{V} \in \mathbf{U}$, la fonctionnelle coût Kohn-Vogelius J_{KV} est différentiable en ω dans la direction V avec*

$$DJ_{KV}(\omega).V = -\int_{\partial\omega} (\mu\partial_n\mathbf{w} - q\mathbf{n}).\partial_n\mathbf{u}_D V_n + \frac{1}{2}\mu\int_{\partial\omega} |\nabla\mathbf{w}|^2 V_n \tag{5.5}$$

où $(\mathbf{w}, q)$ est défini par (5.3).

Démonstration. : D'après la formule de Hadamard (voir [24, théorème 5.2.2]) on obtient :

$$\begin{aligned} DJ_{KV}(\omega).\mathbf{V} &= \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{w} : \nabla\mathbf{w}' + \frac{1}{2}\mu \operatorname{div}(|\nabla\mathbf{w}|^2 \mathbf{V}) \\ &= \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{w} : \nabla\mathbf{w}' + \frac{1}{2}\mu\int_{\partial(\Omega\setminus\overline{\omega})} |\nabla\mathbf{w}|^2 V_n \\ &= \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{w} : \nabla(\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{D}} - \boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{N}}) + \frac{1}{2}\mu\int_{\partial\omega} |\nabla\mathbf{w}|^2 V_n \end{aligned}$$

car $\mathbf{V} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Donc

$$DJ_{KV}(\omega).\mathbf{V} = \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{w} : \nabla\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{D}} - \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{w} : \nabla\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{N}} + \frac{1}{2}\mu\int_{\partial\omega} |\nabla\mathbf{w}|^2 V_n \tag{5.6}$$

On montre à présent que

$$\int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu\nabla w : \nabla\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{N}} = 0. \tag{5.7}$$

En appliquant la Formule de Green et en utilisant les équations du système (5.2) résolu

par $(\boldsymbol{u'_N}, p'_N)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{w} : \nabla\boldsymbol{u'_N} &= -\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu\Delta\boldsymbol{u'}_N.\mathbf{w} + \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} \mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u'_N}.\mathbf{w} \\
&= -\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla p'_N.\mathbf{w} + \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} \mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u'_N}.\mathbf{w} \\
&= \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} p'_N \operatorname{div}\mathbf{w} - \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} p'_N\mathbf{n}.\mathbf{w} + \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} \mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u'_N}.\mathbf{w} \\
&= \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} \left(\mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u'_N} - p'_N\mathbf{n}\right).\mathbf{w} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

puisqu'on a $\operatorname{div}\mathbf{w} = \mathbf{0}$ dans $\Omega\backslash\overline{\omega}$, $\mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u'_N} + p'_N\mathbf{n} = 0$ sur O, $\mathbf{w} = \boldsymbol{u_D} = \boldsymbol{u_N} = 0$ sur $\partial\Omega\backslash\overline{O}$ et $\mathbf{w} = 0$ sur $\partial\omega$. Notez que $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^{1/2}_{00}(O)$ puisque $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ et s'annule sur $\partial\Omega\backslash\overline{O}$.

On va écrire $\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{w} : \nabla\boldsymbol{u'_D}$ comme une intégrale sur $\partial\omega$. En appliquant la Formule de Green' et en utilisant les équations du système (5.1) résolu par $(\boldsymbol{u'_D}, p'_D)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{w} : \nabla\boldsymbol{u'_D} &= -\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu\Delta\mathbf{w}.\boldsymbol{u'_D} + \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} \mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{w}.\boldsymbol{u'_D} \\
&= -\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla q.\mathbf{u}'_D + \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} \mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{w}.\boldsymbol{u'_D} \\
&= \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} q \operatorname{div}\boldsymbol{u}'_D - \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} q\boldsymbol{u'_D}.\mathbf{n} + \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} \mu\partial_n\mathbf{w}.\boldsymbol{u'_D} \\
&= \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} (\mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{w} - q\mathbf{n}).\boldsymbol{u'_D}.
\end{aligned}$$

Puisque $\boldsymbol{u'_D} = 0$ sur $\partial\Omega$ and $u'_D = -\partial_{\mathbf{n}}u_D V_n$ sur $\partial\omega$, on obtient

$$\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{w} : \nabla\boldsymbol{u'_D} = -\int_{\partial\omega} (\mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{w} - q\mathbf{n}).\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u_D} V_n. \tag{5.8}$$

D'après les équations (5.6), (5.7) et (5.8), on obtient

$$DJ_{KV}(\omega).\mathbf{V} = -\int_{\partial\omega} (\mu\partial_n\mathbf{w} - q\mathbf{n}).\partial_n\boldsymbol{u_D}\mathbf{V}_n + \frac{1}{2}\mu\int_{\partial\omega} |\nabla\mathbf{w}|^2 V_n.$$

■

5.2.5 Dérivée de forme d'ordre deux de la fonctionnelle Kohn-Vogelius

Afin d'étudier la stabilité du problème, on caractérise le Hessien de forme pour $\omega \in \mathcal{O}_{d_0}$ dans la proposition suivante. Alors, on considère un point critique ω^* de la fonctionnelle Kohn-Vogelius pour montrer que le problème d'optimisation (4.6) est instable.

Proposition 9 *Pour* $\mathbf{V} \in \mathbf{U}$,*on a*

$$\begin{aligned} D^2J_{KV}(\omega).V.V &= \int_{\partial\omega} [\mu\nabla\mathbf{w}' : \nabla\mathbf{w} - (\mu\partial_n\mathbf{w}' + \mu\nabla\mathbf{w}n' - q'n - qn').\partial_n\mathbf{u}_D \\ &\quad -(\mu\partial_n\mathbf{w} - qn).(\partial_n\mathbf{u}'_D + \nabla\mathbf{u}_D n')]\, V_n \\ &\quad + \int_{\partial\omega} \operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{2}\mu\left|\nabla\mathbf{w}\right|^2 - (\mu\partial_n\mathbf{w} - qn).\partial_n\mathbf{u}_D\right)\mathbf{V}\right] V_n \end{aligned} \tag{5.9}$$

où $(\mathbf{w}, q)$ *et* $(\mathbf{w}', q')$ *sont définis respectivement par (5.3) et (5.4).*

Démonstration. D'après la proposition (8), on a

$$\begin{aligned} DJ_{KV}(\omega).\mathbf{V} &= \int_{\partial\omega}\left[\frac{1}{2}\mu\left|\nabla\mathbf{w}\right|^2 - (\mu\partial_n\mathbf{w} - q\mathbf{n}).\partial_n\boldsymbol{u_D}\right] V_n \\ &= \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{2}\mu\left|\nabla\mathbf{w}\right|^2 - (\mu\partial_n\mathbf{w} - qn).\partial_n u_D\right)\mathbf{V}\right], \end{aligned}$$

puisque $\mathbf{V} = 0$ sur $\partial\Omega$.

D'après la formule de Hadamard (voir [24, théorème 5.2.2]) on obtient

$$\begin{aligned} D^2J_{KV}(\omega).V.V &= \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \operatorname{div}([\mu\nabla\mathbf{w}' : \nabla\mathbf{w} - (\mu\partial_n\mathbf{w}' + \mu\nabla\mathbf{w}n' - q'n - qn').\partial_n\mathbf{u}_D \\ &\quad -(\mu\partial_n\mathbf{w} - qn).(\partial_n\mathbf{u}'_D + \nabla\mathbf{u}_D n')]\mathbf{V}) \\ &\quad + \int_{\partial\omega} \operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{2}\mu\left|\nabla\mathbf{w}\right|^2 - (\mu\partial_n\mathbf{w} - qn).\partial_n\mathbf{u}_D\right)\mathbf{V}\right] V_n. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{V} = 0$ sur $\partial\Omega$,on obtient

$$\begin{aligned} D^2 J_{KV}(\omega).V.V &= \int_{\partial\omega} [\mu \nabla \mathbf{w}' : \nabla \mathbf{w} - (\mu \partial_n \mathbf{w}' + \mu \nabla \mathbf{w} n' - q' n - q n').\partial_n \mathbf{u}_D \\ &\quad -(\mu \partial_n \mathbf{w} - q n).(\partial_n \mathbf{u}'_D + \nabla \mathbf{u}_D n')] \, V_n \\ &\quad + \int_{\partial\omega} \operatorname{div} \left[\left(\frac{1}{2} \mu \left| \nabla \mathbf{w} \right|^2 - (\mu \partial_n \mathbf{w} - q n).\partial_n \mathbf{u}_D \right) \mathbf{V} \right] V_n. \end{aligned}$$

■

5.2.6 Justification de l'instabilité : Compacité en un point critique

Finalement, on veut étudier la stabilité du problème inverse (4.3). On utilise un résultat de régularité locale (voir (A.2) dans l'annexe B afin de prouver la compacité de l'opérateur de Riesz correspondant au Hessien de forme en une solution ω^* du problème inverse (4.3).

Soit ω^* un point critique de la fonctionnelle Kohn-Vogelius J_{KV}. La proposition suivante montre que le problème d'optimisation (4.6) est instable.

Proposition 10 *Soit $\omega^* \in \mathcal{O}_{d_0}$ une solution du problème inverse (4.3). On a*

$$D^2 J_{KV}(\omega^*).V.V = -\int_{\partial\omega^*} (\mu \partial_n \mathbf{w}' - q' \mathbf{n}).\partial_n \mathbf{u}_D V_n$$

où $(\mathbf{w}', q')$ est défini par (5.4). De plus, l'opérateur de Riesz correspondant à $D^2 J_{KV}(\omega^*)$ défini de $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*)$ dans $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\omega^*)$ est compact.

Démonstration. On cherche les propriétés de stabilité de la fonctionnelle cout J_{KV}. On considère alors une inclusion admissible $\omega^* \in \mathcal{O}_{d_0}$ qui est solution du problème (4.3). Donc, ω^* réalise le minimum absolu de la fonctionnelle cout J_{KV}, $J_{KV}(\omega^*) = 0$ et donc

$\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_N$ et $p_D = p_N$ dans $\Omega\backslash\overline{\omega}$.Par conséquent

$$D^2 J_{KV}(\omega^*).V.V = \int_{\partial\omega^*} -(\mu\partial_n \mathbf{w}' - q'\mathbf{n}).\partial_n \mathbf{u}_D V_n$$

On décompose d'abord $D^2 J_{KV}(\omega^*)$ comme composition de deux opérateurs : pour $\mathbf{V} \in \mathbf{U}$,

$$D^2 J_{KV}(\omega^*).\mathbf{V}.\mathbf{V} = \langle M(\mathbf{V}), T(\mathbf{V})\rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\omega^*),\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*)}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit de dualité entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\omega^*)$ et $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*)$. Ici, l'opérateur T : $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*) \to \mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*)$ est défini par

$$T(\boldsymbol{V}) := -\partial_{\mathbf{n}} \boldsymbol{u_D} V_n$$

et l'opérateur $M : \mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*) \to \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\omega^*)$ est défini par

$$M(\mathbf{V}) := \mu\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{w}' - q'\mathbf{n},$$

avec $\mathbf{w}' := \boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{D}} - \boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{N}}$ et $q' := p'_D - p'_N$. D'après les systèmes (5.1) eé (5.2) et en utilisant le fait que $\mathbf{u}_D = \boldsymbol{u_N}$ dans $\Omega\backslash\overline{\omega^*}$ (et donc $\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u_D} = \partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u}_N$ sur $\partial\omega^*$), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{w}' + \nabla q' &= 0 & \text{dans} & \Omega\backslash\overline{\omega^*}, \\ \operatorname{div}\mathbf{w}' &= 0 & \text{dans} & \Omega\backslash\overline{\omega^*}, \\ \mathbf{w}' &= -\boldsymbol{u}'_N & \text{sur} & \partial\Omega, \\ \boldsymbol{w}' &= 0 & \text{sur} & \partial\omega^*. \end{cases}$$

Puisque $\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u_D}$ ne dépend pas de $\boldsymbol{V}$, donc l'opérateur T est linéaire continu comme multiplicateur par une fonction lisse (voir [33]). Maintenant, on montre le lemme suivant qui affirme que l'opérateur M est compact. Donc, l'opérateur de Riesz correspondant au Hessien de forme est compact comme composition d'un opérateur linéaire continu avec un opérateur compact. ■

Lemme 5.1 *L'opérateur M est compact.*

Démonstration. On décompose l'opérateur M comme suit :

$$M := M_2 \circ M_1$$

avec

$$M_1 : \mathbf{V} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*) \mapsto M_1(\mathbf{V}) := -\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{N}} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega),$$

et

$$M_2 : \boldsymbol{\Psi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega) \mapsto M_2(\boldsymbol{\Psi}) := \mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{\Phi} - \chi\mathbf{n} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\omega^*),$$

où $(\mathbf{u}'_N, p'_N)$ est solution de (5.2) et où $(\boldsymbol{\Phi}, \chi) \in \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \overline{\omega^*}) \times \mathrm{L}^2_0(\Omega \setminus \overline{\omega^*})$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mu\Delta\boldsymbol{\Phi} + \nabla\chi &=& \mathbf{0}, \quad \text{dans} & \Omega\setminus\overline{\omega^*}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} &=& 0 \quad \text{dans} & \Omega\setminus\overline{\omega^*}, \\ \boldsymbol{\Phi} &=& \boldsymbol{\Psi} \quad \text{sur} & \partial\Omega, \\ \boldsymbol{\Phi} &=& \mathbf{0} \quad \text{sur} & \partial\omega^*. \end{array}\right. \tag{5.10}$$

On montre que M_1 est linéaire continu et M_2 est compact. On vérifie que

$$M_1 = M_{1,2} \circ M_{1,1}$$

avec

$$M_{1,1} : \boldsymbol{V} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*) \mapsto M_{1,1}(\boldsymbol{V}) := -\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{N}}V_n \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*)$$

et avec

$$M_{1,2} : \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega^*) \mapsto M_{1,2}(\boldsymbol{V}) := -\boldsymbol{z} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega),$$

où le couple $(\boldsymbol{z}, q) \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega^*}) \times \mathrm{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega^*})$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mu\Delta\mathbf{z} + \nabla q & = & \mathbf{0}, & \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega^*}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{z} & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega^*}, \\ -\mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{z} + q\mathbf{n} & = & \mathbf{0} & \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ \mathbf{z} & = & \boldsymbol{\eta} & \text{sur} \quad \partial\omega^*. \end{array}\right.$$

Puisque $\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u_N}$ ne dépend pas de $\mathbf{V}$, l'opérateur $M_{1,1}$ est linéaire continu comme multiplicateur par une fonction lisse (voir [33]) et l'opérateur $M_{1,2}$ est clairement linéaire continu. Donc M_1 est linéaire continu.

Finalement,on décompose M_2 comme suit :

$$M_2 = M_{2,3} \circ M_{2,2} \circ M_{2,1}$$

où

$$M_{2,1} : \boldsymbol{\Psi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega) \mapsto (\boldsymbol{\Phi}, \chi) \in \mathbf{H}^3(\Omega_{d_0}\backslash\overline{\omega^*}) \times \mathbf{H}^2(\Omega_{d_0}\backslash\overline{\omega^*})$$

avec $(\boldsymbol{\Phi}, \chi)$ solution de (5.10),

$$M_{2,2} : (\boldsymbol{v}, \xi) \in \mathbf{H}^3(\Omega_{d_0}\backslash\overline{\omega^*}) \times \mathbf{H}^2(\Omega_{d_0}\backslash\overline{\omega^*}) \mapsto \mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{v} - \xi\mathbf{n} \in \mathbf{H}^{3/2}(\partial\omega^*)$$

et $M_{2,3}$ est l'injection compacte de $\mathbf{H}^{3/2}(\partial\omega^*)$ dans $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\omega^*)$. D'après le résultat de la régularité locale A.2, l'opérateur $M_{2,1}$ est linéaire continu et l'opérateur $M_{2,2}$ est évidemment linéaire continu. Donc, par composition M_2 est compact ce qui conclut la démonstration.

■

Cette proposition explique les difficultés rencontrées pour résoudre numériquement ce problème. En effet, le gradient n'a pas une sensibilité uniforme par rapport à la direction de la déformation : donc, des oscillations du bord engendrées par de hautes fréquences sont à prévoir (voir le chapitre suivant consacré aux expériences numériques).

Chapitre 6

Expériences numériques

Puisque le problème est sévèrement mal posé, on a besoin de méthodes de régularisation pour le résoudre numériquement, par exemple en ajoutant à la fonctionnelle une pénalisation en termes de périmètre. En effet, ce terme conduit à des problèmes bien posés (voir [11] ou [16]). Ici, on a choisi de faire une régularisation paramétrique en utilisant un modèle paramétrique des variations de la forme afin de mettre en évidence le mauvais conditionnement de la matrice du Hessien de forme.

Les simulations numériques présentées dans ce chapitre ont été réalisées à l'université de Pau et des pays de l'Adour au Laboratoire de Mathématiques Appliquées et sont publiées dans [13]

6.1 Cadre pour les simulations numériques.

Les simulations numériques présentées sont faites en deux dimensions en utilisant les éléments finis de bibliothèque MELINA (voir [32]) et le générateur de maillage TRIANGLE (voir [47]). On utilise un $P3 - P2$ discrétisation des éléments finis pour résoudre les équations de Stokes (4.4) et (4.5). le cadre est la suivante : on suppose que la viscosité cinématique μ est égale à 1, le bord extérieur est supposé être le cercle unité centré à

l'origine et on considère la condition aux limites extérieures de Dirichlet

$$f = \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \right\},$$

où $n = (n_1, n_2)$ est la normale extérieure unitaire. On remarque que f est telle que la condition de compatibilité (4.1) est satisfaite. Afin d'avoir une paire appropriée (mesure g, domaine ω^*), on utilise un ensemble de données synthétiques : on fixe une forme ω^*, on résoud le problème de Stokes (4.4) dans $\Omega \backslash \overline{\omega^*}$ en utilisant une autre méthode des éléments finis (ici un $P4 - P3$ discrétisation des éléments finis) et on extrait la mesure g en calculant $-\mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} + p\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$.Sauf si indiqué, les simulations sont effectuées dans le cas où $O = \partial\Omega$.

Ici, on se limite aux domaines en forme d'étoile et on utilise des coordonnées polaires pour la paramétrisation : la frontière $\partial\omega$ de l'objet peut être alors paramétrée par

$$\partial\omega = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + r(\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \right\},$$

où x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$ et où r est une fonction de classe $C^{2,1}$, 2π-périodique et sans point double . En tenant compte de notre principal résultat de compacité (10), on approxime le rayon polaire r par sa série de Fourier tronquée

$$r_N(\theta) := a_0^N + \sum_{k=1}^{N} a_k^N \cos(k\theta) + b_k^N \sin(k\theta),$$

pour les simulations numériques. En effet, cette régularisation par projection permet de supprimer les hautes fréquences générées par $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k >> 1$, pour lesquelles la fonctionnelle est dégénérée.

Donc, la forme inconnue est entièrement définie par les coefficients (a_i, b_i). Par conséquent, pour k = 1,...,N, les directions de déformation correspondantes sont respective-

ment,

$$\mathbf{V}_1 := \mathbf{V}_{x_0} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{V}_2 := \mathbf{V}_{y_0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3(\theta) := \mathbf{V}_{a_0}(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{2k+2}(\theta) := \mathbf{V}_{a_k}(\theta) := \cos(k\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \mathbf{V}_{2k+3}(\theta) := \mathbf{V}_{b_k}(\theta) := \sin(k\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$\theta \in [0, 2\pi)$.

Le gradient est ensuite calculé composante par composante en utilisant sa caractérisation (voir proposition (8), formule (5.5)) :

$$(\nabla J_{KV}(\omega))_k = DJ_{KV}(\omega).\mathbf{V}_k, \qquad k = 1, ..., 2N + 3$$

Cette égalité est simplement

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{J_{KV}((\mathbf{I} + t\mathbf{V}_k)(\omega)) - J_{KV}(\omega)}{t} = DJ_{KV}(\omega).V_k$$

Notez qu'on a à résoudre que deux problèmes de Stokes (problèmes (4.4) et (4.5)) pour calculer le gradient. En effet, la dépendance de la direction des perturbations V est explicite dans la formule (5.5).

Remarque 6.1 *Une autre fonctionnelle possible est celle des moindres carrés correspondante. Dans ce cas, on doit aussi résoudre deux problèmes de Stokes pour calculer le gradient de forme : un pour l'état et l'autre pour la fonction adjointe (voir [7]).*

La méthode d'optimisation utilisée pour les simulations numériques est ici le classique algorithme du gradient avec une recherche en ligne (en utilisant les conditions de Wolfe : voir par exemple

[43, éq. (3.6) page 34]). De plus, on utilise ici : $N_{ext} := 100$ points de discrétisation pour la frontière extérieure et $N_{int} := 75$ pour la frontière intérieure. Pour être tout à fait explicite, on détaille cet algorithme :

Algorithme 1

1. Fixer un nombre d'itérations M et une forme initiale ω_0,

2. mailler $\Omega\backslash\overline{\omega_i}$ en utilisant TRIANGLE (où ω_i désigne la i-ème itération de la forme approchée),

3. résoudre les problèmes (4.4) et (4.5) avec $\omega = \omega_i$ à l'aide de MELINA,

4. extraire $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_D$, $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_N$, p_D et p_N sur $\partial\omega_i$ et calculer $\nabla J_{KV}(\omega_i)$ à l'aide de la formule (5.5),

5. utiliser les conditions de Wolfe pour calculer une longueur de pas satisfaisante α_i,

6. déplacer les coefficients associés à la forme : $\omega_{i+1} = \omega_i - \alpha_i \nabla J_{KV}(\omega_i)$,

7. revenir à l'étape 2. tant que $i < M$.

Le critère d'arrêt de l'algorithme est ici le nombre des itérations. De toute évidence, ce critère peut être modifié et même amélioré, mais ce simple critère permet d'obtenir des résultats efficaces et c'est la raison pour laquelle on l'a choisi.

Remarque 6.2 *Une méthode régularisée de Newton pourrait être utilisée (comme dans [19] par exemple) afin d'effectuer la procédure numérique à l'aide des informations du Hessien de forme. Cependant, on n'utilise pas ici une méthode d'optimisation d'ordre deux en raison de l'expression du Hessien de forme (5.9). En effet, on remarque que* $(\mathbf{u}'_D, p'_D)$ *et* $((\mathbf{u}'_N, p'_N)$ *(et donc* $(\mathbf{w}', q')$*) dépendent de la direction de perturbation* $\mathbf{V}$ *Par conséquent, si on veut calculer ce Hessien de forme (pour une forme paramétrée par* k *paramètres) alors on aura à résoudre* $2 + 2 \times k$ *problèmes de Stokes, ce qui serait trop coûteux.*

6.2 La dégénérescence de la fonctionnelle

Tout d'abord, on veut détecter un obstacle ω_1^* contenu dans la classe des objets avec lesquels on travaille. On veut détecter l'obstacle dont le bord est paramétré par :

$$\partial\omega_1^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.15 \end{pmatrix} + (0.65 - 0.25\cos\theta - 0.15\sin\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \right\},$$

c'est-à-dire avec 5 paramètres. Afin de reconstruire cet objet, on travaille avec des formes paramétrées respectivement par 5 et 15 paramètres et on arrête chaque expérience lorsqu'on obtient une valeur résiduelle de la fonction coût J_{KV} : $\varepsilon \approx 10^{-3}$.

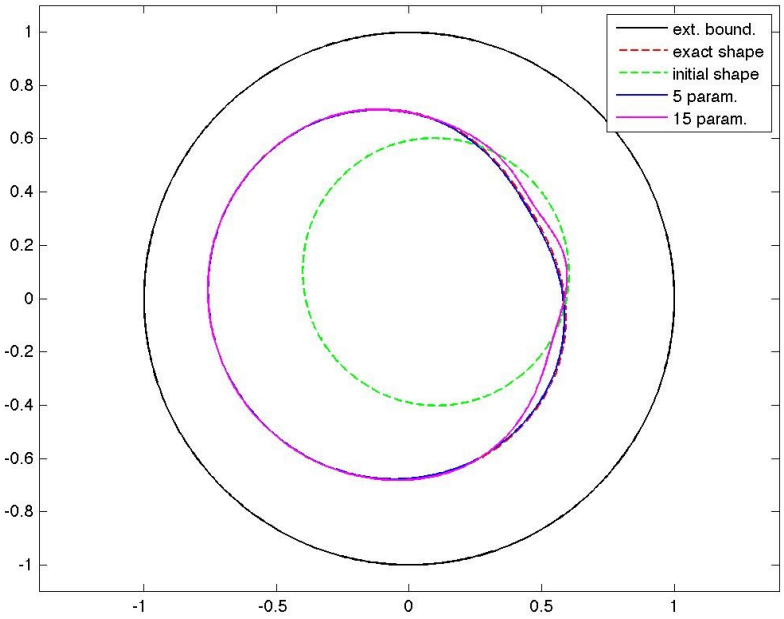


Figure 2. Reconstruction de ω_1^* avec des nombres différents de paramètres

La figure 2 montre que lorsqu'on travaille avec 5 paramètres, le résiduel ε correspond à une très bonne approximation de l'objet. Mais plus on ajoute des paramètres, plus la fonctionnelle s'aplatit et plus l'approximation correspondante au résiduel ε est faible. En effet, on voit des oscillations de l'objet final lorsqu'on travaille avec des fréquences élevées. On peut également remarquer qu'on met plus de temps pour obtenir le résiduel ε avec de nombreux paramètres.

La même expérience a été réalisée afin de détecter un obstacle plus complexe qui

n'appartient pas à l'ensemble des objets discrétisés. Il est paramétré par :

$$\partial\omega_2^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0.1 + 0.5\cos\theta + 0.1\cos 4\theta \\ 0.5\sin\theta + 0.1\cos 4\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \tag{6.1}$$

Là encore, la conclusion est la même (voir figure 3) : les fréquences élevées provoquent des oscillations de la frontière, et donc une moins bonne approximation.

Plus d'itérations sont nécessaires pour obtenir le résiduel ε.

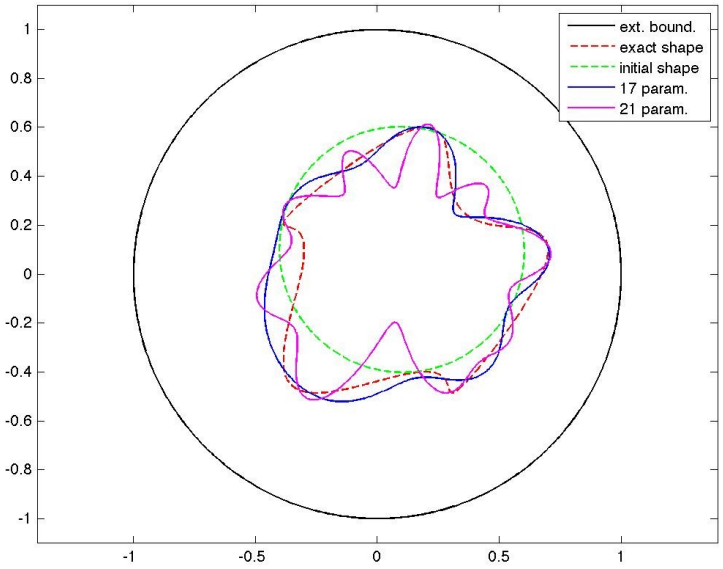


Figure 3. Reconstruction de ω_2^* avec des nombres différents de paramètres

Le problème est : comment connaître le nombre de paramètres avec lesquels on doit travailler pour bien approcher la forme ? En effet, si on travaille avec trop peu de paramètres on ne peut pas détecter une forme non triviale et si on travaille avec de trop nombreux paramètres, la dégénérescence de la fonctionnelle conduit à des problèmes.

6.3 Une méthode adaptative

Une solution qui semble être efficace est d'utiliser une méthode adaptative. Elle consiste à augmenter progressivement le nombre de paramètres au cours de l'algorithme à un certain nombre fixé et final de paramètres. Par exemple, si on veut travailler avec vingt et un paramètres, on commence à travailler avec deux paramètres durant 5 itérations, puis avec trois paramètres (on ajoute le rayon) durant 5 itérations de plus, et puis on ajoute deux paramètres toutes les 15 itérations.

On adapte également le nombre de points de discrétisation de la frontière intérieure (on conserve la même pour la frontière extérieure). On fixe un nombre minimum de points de discrétisation (ici 40). Donc, lorsqu'on considère les directions de perturbation liées à $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, on discrétise la frontière intérieure en utilisant $N_{int} = 9 \times k$ points. Cette méthode permet de discrétiser la moitié d'une période en utilisant 5 points, ce qui semble approprié.

L'algorithme est le même que l'algorithme 1 décrit ci-dessus. Cependant, l'étape 6. est remplacée par

$$\omega_{i+1}(1:m) = \omega_i(1:m) - \alpha_i \nabla J_{KV}(\omega_i)(1:m),$$

où $\omega_i(1:m)$ représente les m premiers coefficients paramétrisant la forme ω_i (la notation va de même pour $\nabla J_{KV}(\omega_i)(1:m)$). Le nombre m croît au nombre fixé et final de paramètres suivant la procédure décrite précédemment. Ce processus permet d'éviter les oscillations de la frontière comme ce qui est montré dans la figure 4.

En effet, on a vu dans la figure 3 que si on travaille avec vingt et un paramètres, des oscillations apparaissent, mais on voit dans la figure 4 que ce n'est pas le cas en utilisant cette méthode adaptative. On peut remarquer que cette méthode adaptative conduit à des étapes dans l'évolution du résiduel.

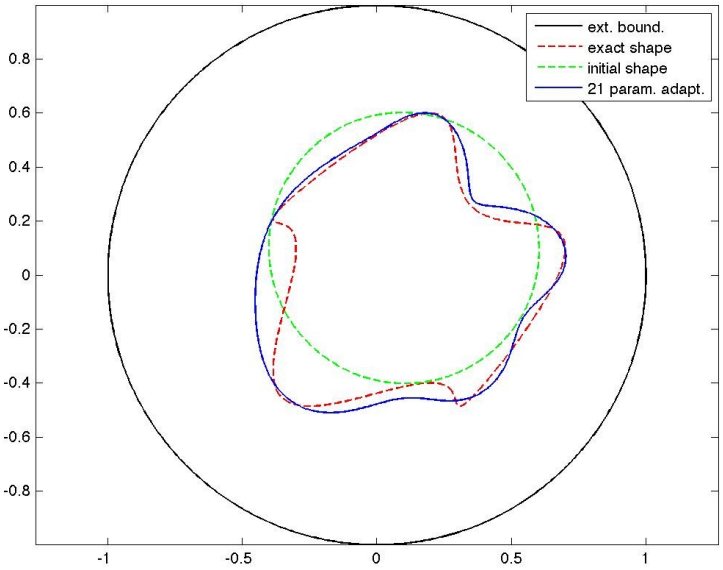


Figure 4. Reconstruction de ω_2^* en utilisant la méthode adaptative avec 21 paramètres

Donc cette méthode adaptative semble être efficace et permet de reconstruire l'obstacle en supprimant les oscillations dues aux hautes fréquences.

6.4 La détection d'objets avec des coins

Afin de tester les performances de cet algorithme et de cette méthode adaptative, on veut maintenant détecter des obstacles plus complexes et en particulier, on se demande si elle est efficace pour reconstituer des objets contenant des lignes droites et des angles.

Le premier objectif est alors de détecter le carré ω_3^*, dont les sommets sont les points $(-0.55, -0.55)$, $(0.55, -0.55)$, $(0.55, 0.55)$ et $(-0.55, 0.55)$. On voit dans la figure 5 que cette reconstruction est très efficace.

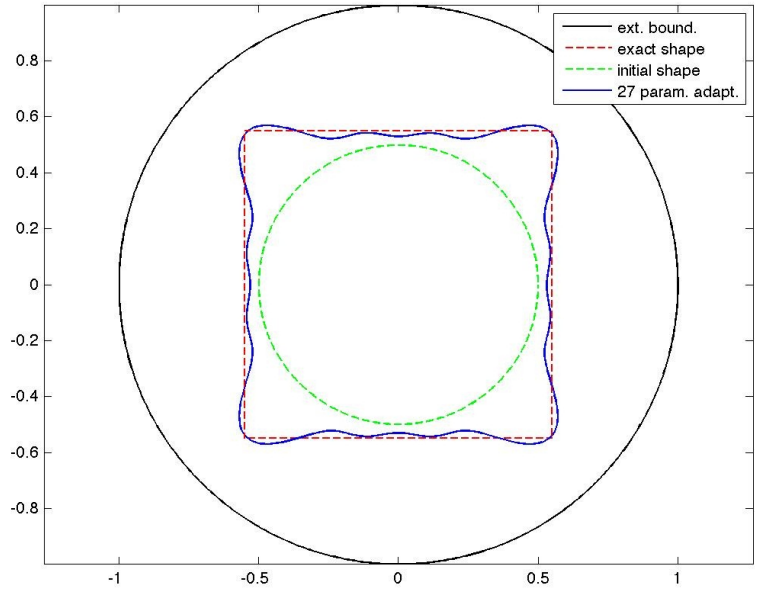


Figure 5. Reconstruction de ω_3^* en utilisant la méthode adaptative avec 27 paramètres

Toutefois, si on veut reconstruire un objet plus petit, les résultats sont bien pires. En effet, dans la figure 6, on reconstruit le carré ω_4^* dont les sommets sont les points $(-0.2, -0.2)$, $(0.2, -0.2)$, $(0.2, 0.2)$ et $(-0.2, 0.2)$. On voit que la détection n'est pas bonne.

Ainsi, la méthode de paramétrisation combinée avec la méthode adaptative semble être efficace pour reconstruire des obstacles, même si les formes ne sont pas triviales. Cependant, le comportement de la régularisation complique la détection de petits objets ou des parties éloignées du domaine de mesure.

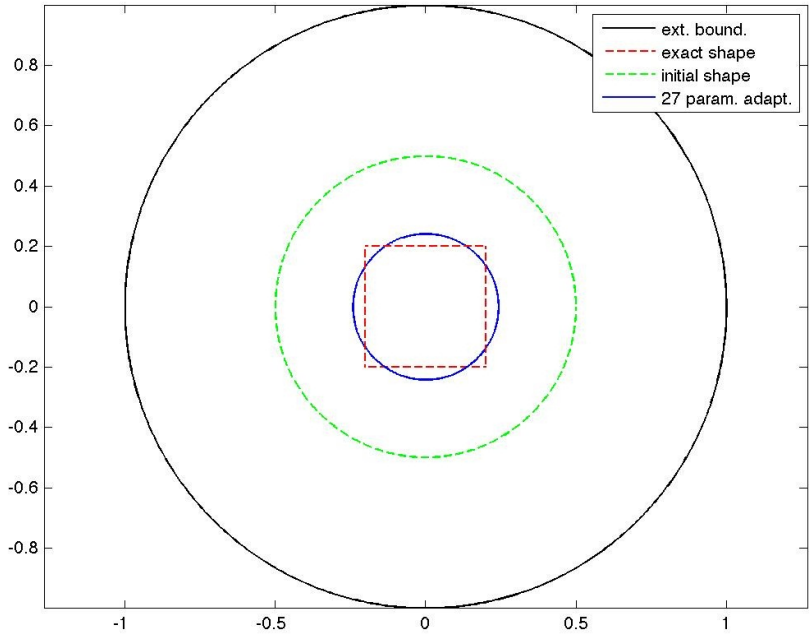


Figure 6. Reconstruction de ω_4^* en utilisant la méthode adaptative avec 27 paramètres

6.5 Influence de la taille du domaine dans lequel les mesures sont effectuées

On examine l'influence de la taille de O, la partie de la frontière où les mesures sont sensées être faites. Maintenant, on restreint le domaine O à une certaine partie de $\partial\Omega$. On précise qu'on utilise ici exactement le même algorithme et les mêmes paramètres et données que ceux utilisés dans la section 4.3. En particulier, on utilise la méthode adaptative décrite précédemment et on veut reconstruire l'objet ω_2^* qui est donné par (6.1).

Dans la figure 7, on fait la mesure seulement sur un demi-cercle. Sur la gauche de la figure 7, O est le demi-cercle supérieur. Comme on pouvait s'y attendre, la reconstruction

de l'objet ω_2^* est moins efficace que dans le cas $O = \partial\Omega$ (voir Figure 4).

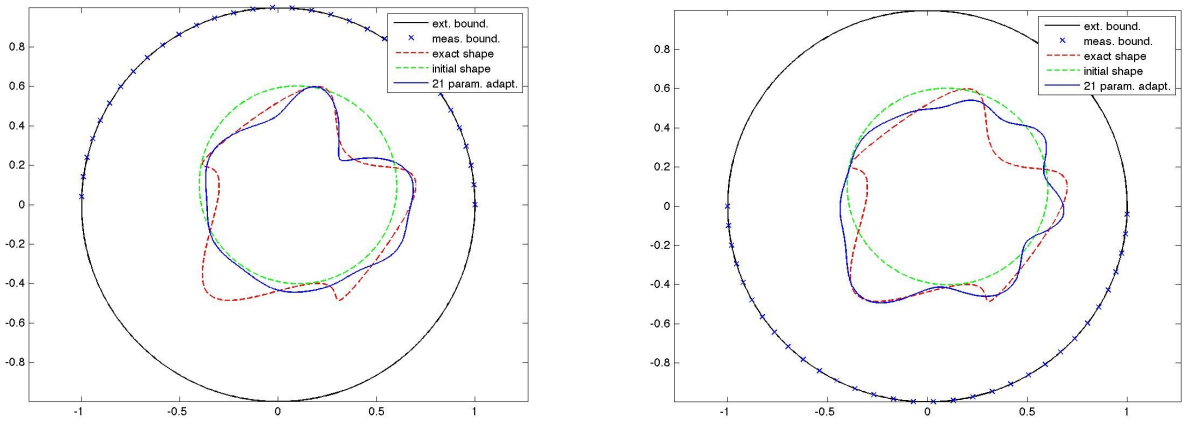


Figure 7. Reconstruction de ω_2^* en utilisant la méthode adaptative avec 21 paramètres en restreignant le domaine de mesure (O est une moitié de $\partial\Omega$)

En particulier, le fond de l'obstacle (c'est à dire la partie exposée à la partie de la frontière extérieure, où on ne fait pas la mesure) est mal détectée. On précise qu'ici, on n'obtient pas un résiduel $\varepsilon \approx 10^{-3}$ comme dans le cas $O = \partial\Omega$ mais seulement $\varepsilon \approx 6.8.10^{-3}$. Sur la droite de la figure 7, O est le demi-cercle inférieur. On obtient des résultats similaires. Comme on s'y attendait, on voit que dans ce cas, seule la partie inférieure de l'obstacle est bien détectée.

Dans la figure 8, O est le quart de cercle supérieur droit. Là encore, la reconstruction

est moins efficace que dans le cas $O = \partial\Omega$ et même dans le cas précédent $O = \frac{1}{2}\partial\Omega$.

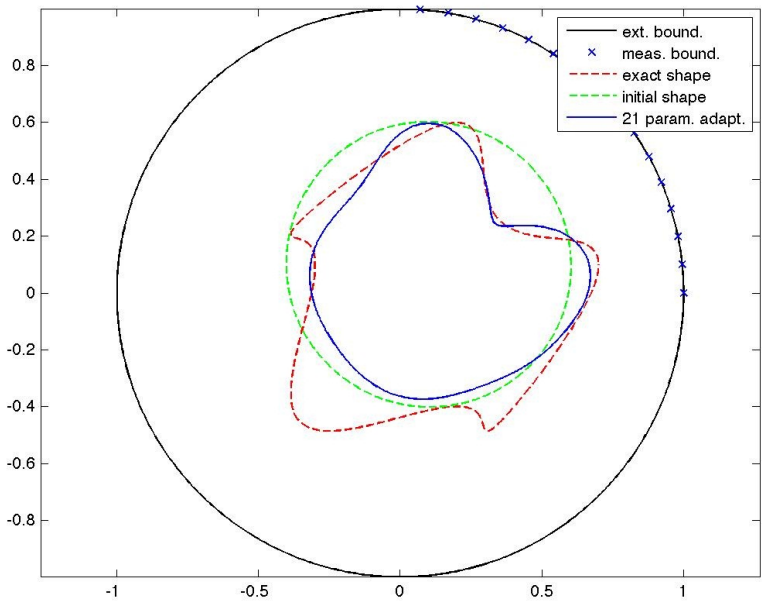


Figure 8. Reconstruction de ω_2^* en utilisant la méthode adaptative avec 21 paramètres en restreignant le domaine de mesure (O est un quart de $\partial\Omega$)

On peut remarquer encore une fois que seule la partie exposée au domaine de mesure O est bien déterminée. Ici, on obtient seulement un résiduel $\varepsilon \approx 8.4.10^{-3}$

Ces deux simulations soulignent une idée intuitive : Plus le domaine de mesure $O \subset \partial\Omega$ est petit, plus il est difficile de bien reconstruire l'objet ω.

6.6 Détecter plus d'un objet

Théoriquement, outre les hypothèses de régularité, l'hypothèse principale est que $\Omega\backslash\overline{\omega}$ est connexe. Cette hypothèse n'exclut pas le cas de deux ou plusieurs inclusions dans Ω. Ainsi, on veut maintenant détecter numériquement deux objets : un carré ω_5^* dont les sommets sont les points $(-0.6,\ 0.1)$, $(-0.1,\ 0.1)$, $(-0.1,\ 0.6)$ et $(-0.6,\ 0.6)$ et un cercle

ω_6^* centré en $(0.35, -0.35)$ et de rayon 0.35. Ici encore, on utilise la méthode adaptative décrite dans la section 4.3. Puisque le calcul est nettement plus long que celui avec un seul objet, on arrête l'expérience lorsque le résiduel est $\varepsilon \approx 1.5e-02$. On obtient alors la figure 9.

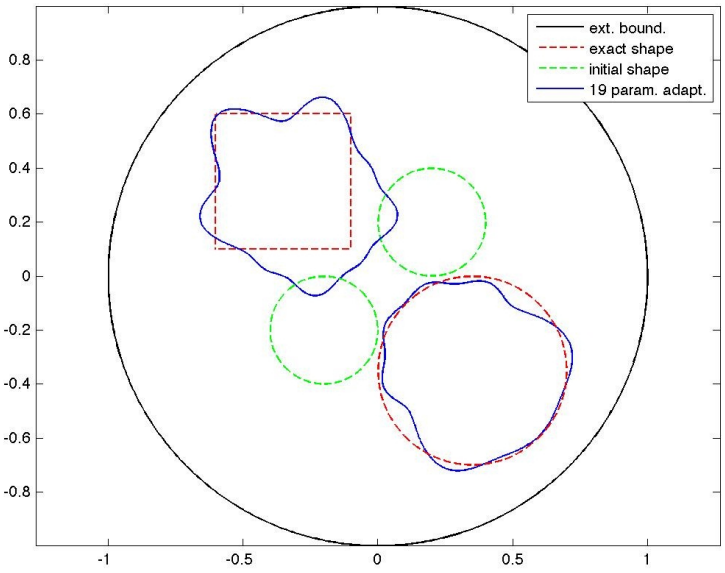


Figure 9. Reconstruction de ω_5^* et ω_6^* en utilisant la méthode adaptative avec 19 paramètres

Ce résultat est satisfaisant et on peut espérer qu'il serait plus efficace si l'on augmente la précision du calcul (à l'aide d'une meilleure discrétisation d'éléments finis par exemple) et / ou si l'on augmente le temps de calcul. On remarque que le carré non lisse n'est pas aussi bien reconstruit que le cercle : cela est du à la représentation polaire qu'on a utilisée.

Conclusion

Le problème de la contrôlabilité approximative pour l'équation de la chaleur est maintenant bien connu pour le cas sans contrainte sur le contrôle. Il a été étudié par plusieurs auteurs utilisant des méthodes variées. L'intéret dans la première partie de cette thèse est que l'étude proposée concerne la contrôlabilité approximative avec contraintes sur le contrôle.

Le problème de contrôlabilité approchée étudié ici est un modèle qui s'adapte à la modélisation des sentinelles lorsque l'observation du système est instantanée. Effectivement, dans le cas d'observations instantanées non nulles, le modèle conduit à un problème de contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur. Cependant l'effet régularisant de l'équation de la chaleur ne facilite pas une caractérisation simple de la régularité de ses solutions, et donc leur contrôlabilité exacte. C'est pourquoi, on s'est limité au modèle approché, ce qui amène évidemment à la notion de sentinelle approchée.

En seconde partie, on a partiellement reconstruit un obstacle immergé dans un fluide en minimisant la fonctionnelle Kohn-Vogelius. L'approche de Kohn-Vogelius proposée ici n'est pas la plus classique et permet d'effectuer la mesure sur une partie seulement du bord extérieur et pas sur le bord extérieur entier. On a utilisé les méthodes d'optimisation de formes pour calculer le gradient et motiver l'utilisation d'un modèle paramétrique pour résoudre numériquement le problème inverse. En effet, ce problème est sévèrement mal posé. Les simulations numériques réalisées dans le cas bi-dimensionnel sont efficaces mais des oscillations sont apparues lorsqu'on a travaillé avec les hautes fréquences. Afin d'éliminer ces oscillations, la méthode adaptative qu'on a proposée semble être efficace. Notre algorithme permet de reconstruire plus d'un objet si l'on sait combien d'objets sont inclus dans le domaine.

Annexe A

Annexe

A.1 Origines physiques du problème de Stokes

Au cours des deux derniers siècles, les équations de Navier-Stokes, concernant l'écoulement d'un fluide, furent largement étudiées, et ce, dans des domaines mathématiques variés, allant de l'analyse numérique à l'analyse fonctionnelle. Beaucoup de ces études concernent une forme simplifiée de ces équations : le problème de Stokes.

Le problème de Stokes, issu de la mécanique des fluides, décrit le mouvement d'un fluide newtonien, incompressible, de vitesse "quasi-stable" ou petite. Cette partie consiste à présenter les origines physiques de ce problème.

En mécanique des fluides, le mouvement N-dimensionnel ($N = 2$ ou 3) d'un fluide visqueux et incompressible est décrit par des équations aux dérivées partielles non linéaires appelées équations de *Navier-Stokes* (nom dû à deux physiciens du XIX^{me} siècle : Claude Navier et George Stokes). Sous certaines hypothèses, ces équations se simplifient en un système d'équations : le problème de Stokes.

la présentation de l'origine physique de ces équations exposée ici s'inspire du livre de E.Guyon ([23]), ainsi que de celui de L.Landau ([28]).

• Soit un volume ν de fluide (i.e. un milieu parfaitement déformable). On applique la

relation fondamentale de la dynamique (cf fin de l'annexe) à ν.

L'égalité entre la variation temporelle de sa quantité de mouvement et l'ensemble des forces (de volume et de surface) exercées sur ν donne

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\int\int_{\nu}\rho u\ d\tau\right\} = \int\int\int_{\nu}\rho f d\tau + \int\int_{S}[\sigma].nd\Sigma,$$

où

- $d\tau$ est le volume d'un élément matériel de fluide,

- $d\Sigma$ est un élément de la surface $S := \partial\nu$,

- $[\sigma]$ est le tenseur des contraintes, i.e. le tenseur prenant en compte l'ensemble des forces de surface (pression et viscosité) s'exerçant sur l'élément $d\Sigma$,

- f est la force en volume par unité de masse,

- ρ est **la densité du fluide (supposée constante)**,

- u est la vitesse du fluide.

La masse d'un élément matériel du fluide est $\rho d\tau$. En utilisant la formule d'Ostrogradsky (cf fin de l'annexe), l'équation précédente devient

$$\int\int\int_{\nu}\rho\frac{du}{dt}d\tau = \int\int\int_{\nu}\rho f\ d\tau + \int\int\int_{\nu}\mathrm{div}\,[\sigma]\,d\tau.$$

Comme cette égalité est établie pour tout ν, l'équation locale de mouvement d'une particule de fluide s'en déduit :

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho f + \mathrm{div}[\sigma]. \tag{A.1}$$

Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ se décompose en :

$$\sigma_{i,j} = \sigma'_{i,j} - P\delta_{ij} \qquad (i,j = 1,...,N), \tag{A.2}$$

où

- P est la pression,

- $[\sigma']$ est le tenseur de viscosité, i.e. le tenseur prenant en compte les forces de viscosité, défini explicitement plus bas dans le cadre des fluides newtoniens,

- δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

En prenant la divergence de la décomposition (A.2), on a pour $i = 1, ..., N$,

$$(\text{div}[\sigma])_i = (\text{div}[\sigma'])_i - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial(P\delta_{i,j})}{\partial x_j} = (\text{div}[\sigma'])_i - \frac{\partial P}{\partial x_i}.$$

Donc l'equation (A.1) devient pour tout $i = 1, ..., N$:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i - (\nabla P)_i + (\text{div}[\sigma'])_i.$$

Comme $\frac{dx_i}{dt} = u_i$, il vient pour $i = 1, ..., N$,

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

D'où :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^{N} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + (\text{div}\,[\sigma'])_i \qquad (i = 1, ..., N) \qquad \text{(A.3)}$$

où

- $\rho \frac{du_i}{dt}$ représente l'accélération d'une particule de fluide,
- $\rho \sum_{j=1}^{N} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ représente la variation de vitesse,
- ρf_i représente l'ensemble des forces volumiques appliquées au fluide,
- $-\frac{\partial P}{\partial x_i}$ représente les forces de pression,
- $(\text{div}\,[\sigma'])_i$ représente les forces de viscosités dues à la déformation des éléments du fluide.

• On suppose que le fluide est newtonien, i.e. que le tenseur de viscosité $[\sigma']$ est une fonction linéaire du tenseur des déformations. Alors, le tenseur de viscosité est défini par

$$\sigma'_{i,k} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \qquad \forall i, k = 1, ..., N, \qquad \text{(A.4)}$$

où η et ζ sont des coefficients de viscosité strictement positifs et indépendants de la vitesse. η est appelé **viscosité dynamique** et ζ **viscosité seconde**. Ces coefficients dépendent en principe de la pression et de la température. Mais dans la plupart des cas, leur variation en différents points du fluide est négligeable, ce qui permet de supposer que ces quantités sont constantes.

D'aprés la définition du tenseur de viscosité (A.4), $(\operatorname{div}[\sigma'])_i$ peut se développer pour $i = 1, ..., N$ de la manière suivante :

$$(\operatorname{div}[\sigma'])_i = \eta \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right). \qquad \text{(A.5)}$$

On suppose de plus que le fluide est incompressible. Alors $\operatorname{div} u = 0$.Ainsi les égalités (A.3) et (A.5) donnent :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho \ f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \qquad (\ i = 1, ..., N)\ , \qquad \text{(A.6)}$$

Ces équations sont appelées **équations de Navier-Stockes**, et la condition $\operatorname{div} u = 0$ est appelée **condition d'incompressibilité**.

Remarque *:* Les équations de Navier-Stockes se trouvent aussi sous la forme équivalente suivante :

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{N}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{i,\,j}=\rho\ f_i \qquad (\ i=1,...,N)\ ,$$

où pour $i,\ j=1,...N$ on a :

$$\sigma_{i,\,j}=-P\delta_{i,j}+2\eta D_{i\,j}(u) \quad \text{avec} \quad D_{i\,j}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Pour simplifier ces équations, on considère seulement le **cas stationnaire**, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

De plus, on suppose que la vitesse u est suffisamment petite**,** ou bien que les variations de la vitesse le sont **:** on néglige ainsi ,le terme de convection, i.e.

$$\sum_{j=1}^{N}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=0.$$

Donc, en posant $p=\dfrac{P}{\rho}$ et $\nu=\dfrac{\eta}{\rho}$, on obtient, à partir des équations de Navier-Stokes (A.6), le **système de Stokes** :

$$\begin{aligned} -\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+\frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \qquad (i=1,....,N),\\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned}$$

où p est appelée pression cinématique et ν la viscosité cinématique. Mais pour simplifier, on les appelle pression et viscosité. Ainsi le système de Stokes sera étudié sous la

forme :

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p &= f \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{cases}$$

Remarque A.1 *Le système de Stokes peut aussi s'écrire sous la forme équivalente suivante :*

$$\begin{cases} -2\nu\sum_{j=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_j}D_{i\ j}(u) + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i \quad (i = 1, ..., N), \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{cases}$$

Commentaires :

(i) Conditions aux limites. Pour fermer le système, on doit rajouter des conditions aux limites.

(ii) Repère Chronologique. La première version des équations de Navier-Stockes a été donnée par C. Navier en 1827. Puis une autre formulation, proche de la version moderne, a été conçue par G. Stockes en 1845.

Formule d'Ostrogradsky : Soit K un domaine fermé et borné de $\mathbb{R}^3$ et limité par une surface orientée $\Sigma := \partial K$ de normale unitaire extèrieure n. Soit $\overrightarrow{V}$ un champ vectoriel de classe C^1 sur K. Alors on a la formule d'Ostrogradsky suivante

$$\int\int_{\Sigma} \overrightarrow{V}.nd\sigma = \int\int\int_{K} div\overrightarrow{V}dxdydz.$$

Relation fondamentale de la dynamique : Soit un corps de masse m constante. L'accélération subie par un corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m.

Ceci se récapitule en disant que la somme des forces exercées sur un objet est égale à sa masse multipliée par son accélération, ie.

$$m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F_i}$$

où

- $\overrightarrow{F_i}$ désigne les forces extérieures exercées sur l'objet,
- m est sa masse,
- $\overrightarrow{a}$ est l'accélération de son centre d'inertie.

A.2 Quelques résultats sur le problème de Stokes avec des conditions mixtes

On rappelle les résultats classiques sur le problème de Stokes avec des conditions mixtes sur le bord : un théorème d'existence et d'unicité de la solution et un résultat de régularité locale.

Dans toute cette annexe, on note par C une constante générique positive, qui dépend uniquement de la géométrie du domaine et de la dimension, qui peut changer de ligne en ligne.

Tout d'abord, on introduit quelques notations : pour Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$), un sous-ensemble ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ et un sous-ensemble ouvert $O \subset \partial\Omega$ de la frontière extérieure, on définit

$$\mathbf{V}_O(\Omega\backslash\overline{\omega}) := \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega});\ \text{div}\, \boldsymbol{u} = 0 \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\omega},\ \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\omega \cup (\partial\Omega\backslash\overline{O}) \right\}.$$

De plus, on note respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega\backslash\overline{\omega}}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ (ou $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\omega}$) le produit de dualité entre $\left[\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})\right]'$ et $\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})$ et le produit de dualité entre $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ et $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$.

Théorème A.1 *(Existence et unicité de la solution). Soit Ω un ensemble ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) et soit $\omega \subset\subset \Omega$ un sous-ensemble ouvert et Lipschitzien de Ω tel que $\Omega\backslash\overline{\omega}$ est connexe. Soit O un sous-ensemble ouvert de la frontière extérieure $\partial\Omega$ et $\mu > 0$. Soit $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}_O, \mathbf{h}_{ext}, \mathbf{h}_{int}) \in \left[\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})\right]' \times \mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega}) \times \mathbf{H}^{-1/2}(O) \times \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega\backslash\overline{O}) \times$*

$\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)$. *Alors, le problème :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p &=& \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &=& g & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega} \\ -\mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u}+p\mathbf{n} &=& \boldsymbol{h}_O & \text{sur } O \\ \boldsymbol{u} &=& \mathbf{h}_{\mathbf{ext}} & \text{sur } \partial\Omega\backslash\overline{O} \\ \boldsymbol{u} &=& \mathbf{h}_{\mathbf{int}} & \text{sur } \partial\omega \end{array}\right. \tag{A.7}$$

admet une solution unique $(\boldsymbol{u},p)\in\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})\times\mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})$ *et l'estimation suivante est vérifiée*

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})}+\|p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})}\\ &\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{[\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})]'}+\|\boldsymbol{g}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})}+\|\mathbf{h_O}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(O)}+\|\mathbf{h_{ext}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega\backslash\overline{O})}+\|\mathbf{h_{int}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)}\right).\end{aligned}$$

Démonstration. *Etape 1 : Existence et unicité.* on commence par étudier le cas de la divergence nulle. Selon [6, Lemme 3.3] , on considère $\mathbf{H}\in\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})$ tel que div$\mathbf{H}=0$, $\mathbf{H}=\mathbf{h_{int}}$ sur $\partial\omega$, $\mathbf{H}=\mathbf{h_{ext}}$ sur $\partial\Omega\backslash\overline{O}$, tel que $\int\limits_{\partial\Omega\cup\partial\omega}\mathbf{H}.\mathbf{n}=0$ et satisfaisant

$$\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})}\leq C(\|\mathbf{h_{int}}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)}+\|\mathbf{h_{ext}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega\backslash\overline{O})}) \tag{A.8}$$

. Alors le couple $(\mathbf{U}:=\boldsymbol{u}-\mathbf{H},p)\in\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})\times\mathrm{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mu\Delta\mathbf{U}+\nabla p &=& \boldsymbol{f}+\mu\ \Delta\mathbf{H} & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \operatorname{div}\mathbf{U} &=& 0 & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega} \\ -\mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{U}+p\mathbf{n} &=& \mathbf{h_{ext}}+\mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{H} & \text{sur } O \\ \mathbf{U} &=& \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega\backslash\overline{O} \\ \mathbf{U} &=& \mathbf{0} & \text{sur } \partial\omega. \end{array}\right.$$

Selon le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $\mathbf{U}\in\mathbf{V}_O(\Omega\backslash\overline{\omega})$ tel que pour tout

$\mathbf{v} \in \mathbf{V}_O(\Omega\backslash\overline{\omega})$

$$\mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{U} : \nabla\mathbf{v} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega\backslash\overline{\omega}} - \mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{H} : \nabla\mathbf{v} - \langle \mathbf{h_O} + \mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{H}, \mathbf{v} \rangle_O \tag{A.9}$$

et on a, en utilisant (A.8)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{\left[\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})\right]'} + \|\mathbf{h_{int}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)} \right) \\ + \|\mathbf{h_{ext}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega\backslash\overline{O})} + \|\mathbf{h_O}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(O)} \end{aligned} \tag{A.10}$$

En particulier (A.9) est vraie pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_O(\Omega\backslash\overline{\omega}) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega})$. Ainsi en utilisant le théorème de De Rham (voir par exemple [5]), il existe $p \in \mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})$, à une constante additive, tel que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega})$

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{U} \quad &: \quad \nabla\mathbf{v} - \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} p \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &= \quad \left\langle \boldsymbol{f}\,|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega})}, \mathbf{v} \right\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega\backslash\overline{\omega}),\mathbf{H}_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega})} - \mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{H} : \nabla\mathbf{v} \end{aligned} \tag{A.11}$$

Selon [6, Lemme 3.3] ou [21, Théorème 3.2], on définit $\boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})$ tel que $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_N = 1$ dans $\Omega\backslash\overline{\omega}$, $\boldsymbol{\varphi}_N = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega\backslash\overline{O}$ et $\boldsymbol{\varphi}_N = \mathbf{0}$ sur $\partial\omega$ avec $\int\limits_O \boldsymbol{\varphi}_N.\mathbf{n} \neq 0$. Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})$ tel que $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega\backslash\overline{O}$, $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial\omega$ et on définit

$$c_b(\mathbf{v}) = \frac{1}{\int\limits_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} \boldsymbol{\varphi}_N.\mathbf{n}} \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{\omega})} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n}.$$

En utilisant à nouveau [6, Lemme 3.3] ou [21, Théorème 3.2], on définit $\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}_O(\Omega\backslash\overline{\omega})$ de telle manière que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + c_b(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\varphi}_N$, où $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega\backslash\overline{\omega})$ satisfait : $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 =$

$\operatorname{div}(\boldsymbol{v} - c_b(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\varphi}_N)$. En utilisant (A.9) et (A.11) , on obtient

$$\begin{aligned}
\mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{U} \quad &: \quad \nabla\mathbf{v} - \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} p \operatorname{div}\mathbf{v} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_{\Omega\backslash\overline{\omega}} - \mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{H} : \nabla\mathbf{v} \\
- \langle \mathbf{h_O} + \mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{H}, \mathbf{v}\rangle_O + \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{U} \quad &: \quad \nabla(c_b(\mathbf{v})\boldsymbol{\varphi}_N) - \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} p \operatorname{div}(c_b(\mathbf{v})\boldsymbol{\varphi}_N) \\
- \langle \mathbf{f}, c_b(\mathbf{v})\boldsymbol{\varphi}_N\rangle_{\Omega\backslash\overline{\omega}} + \mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{H} \quad &: \quad \nabla(c_b(\mathbf{v})\boldsymbol{\varphi}_N) + \langle \mathbf{h_O} + \mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{H}, c_b(\mathbf{v})\boldsymbol{\varphi}_N\rangle_O .
\end{aligned}$$

Par conséquent, en choisissant la constante additive pour p telle que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} p \quad &= \quad \mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{U} : \nabla\boldsymbol{\varphi}_N, \\
- \langle \mathbf{f}, c_b(\mathbf{v})\boldsymbol{\varphi}_N\rangle_{\Omega\backslash\overline{\omega}} + \mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{H} \quad &: \quad \nabla\boldsymbol{\varphi}_N + \langle \mathbf{h_O} + \mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{H}, c_b(\mathbf{v})\boldsymbol{\varphi}_N\rangle_O
\end{aligned}$$

on montre qu'il existe un unique couple $(\mathbf{U}, p) \in \mathbf{V}_O(\Omega\backslash\overline{\omega}) \times \mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})$ tel que pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})$ avec $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ sur$\partial\Omega\backslash\overline{O}$ et $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial\omega$,

$$\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu\nabla\mathbf{U} : \nabla\mathbf{v} - \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} p \operatorname{div}\mathbf{v} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_{\Omega\backslash\overline{\omega}} - \mu \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{H} : \nabla\mathbf{v} - \langle \mathbf{h_O} + \mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{H}, \mathbf{v}\rangle_O . \quad \text{(A.12)}$$

Etape 2 : estimation. Soit $v := \widetilde{v} + c(p)\boldsymbol{\varphi}_N$, où

$$c(p) := \frac{1}{|\Omega\backslash\overline{\omega}|} \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} p$$

et $\widetilde{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega\backslash\overline{\omega})$ est tel que $\operatorname{div}\widetilde{v} = p - c(p)$ et $\|\widetilde{v}\|_{\mathbf{H}^1_0(\Omega\backslash\overline{\omega})} \leq C \|p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})}$ (voir [6, Lemme 3.3]). En utilisant v dans (A.12), et selon (A.10), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})} + \|p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})} \\
\leq \quad & C \left(\|\mathbf{f}\|_{\left[\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})\right]'} + \|\mathbf{h_{int}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)} + \|\mathbf{h_{ext}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega\backslash\overline{O})} + \|\mathbf{h_O}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(O)} \right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})} + \|p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})} \\ \leq\ & C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\left[\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})\right]'} + \|\mathbf{h_{int}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\omega)} + \|\mathbf{h_{ext}}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega\backslash\overline{O})} + \|\mathbf{h_O}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(O)}\right). \end{aligned}$$

Etape 3 : cas $g \neq 0$. La première partie du théorème est démontrée pour $\boldsymbol{g} = 0$. Le cas $\boldsymbol{g} \neq 0$ est obtenu par un argument de relèvement. On définit

$$\boldsymbol{u_g} := \tilde{\boldsymbol{u_g}} + c(g)\boldsymbol{\varphi_N} - \frac{1}{|\Omega\backslash\overline{\omega}|}\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} (\tilde{\boldsymbol{u_g}} + c(g)\boldsymbol{\varphi_N}) \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega}),$$

où

$$c(g) := \frac{1}{|\Omega\backslash\overline{\omega}|}\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} g$$

et où,selon [21, Théorème 3.2] ou [6, Lemme 3.3], $\tilde{\boldsymbol{u_g}} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega\backslash\overline{\omega})$ est tel que $\operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{u_g}} = g - c(g)$ et $\|\tilde{\boldsymbol{u_g}}\|_{\mathbf{H}^1_0(\Omega\backslash\overline{\omega})} \leq C\|g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})}$. Ainsi $\boldsymbol{u_g}$ est tel que

$$\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \boldsymbol{u_g} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u_g} = g \ \text{ dans } \ \Omega\backslash\overline{\omega} \quad \text{ et } \quad \|\boldsymbol{u_g}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})} \leq C\|g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})}.$$

Ainsi, en définissant $\boldsymbol{u_0} := \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u_g}$ et

$$\tilde{\boldsymbol{f}} : \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega}) \mapsto \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_{\Omega\backslash\overline{\omega}} - \mu\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{H} : \nabla\mathbf{v} - \mu\int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \nabla\boldsymbol{u_g} : \nabla\boldsymbol{v}\,,$$

le problème (A.7) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\boldsymbol{u_0}, p) \in \boldsymbol{V}_O(\Omega\backslash\overline{\omega}) \times \mathrm{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega}) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu\nabla\boldsymbol{u_0} : \nabla\boldsymbol{v} - \int_{\Omega\backslash\overline{\omega}} p \operatorname{div}\boldsymbol{v} = \left\langle \tilde{\boldsymbol{f}}\,,\ \boldsymbol{v}\right\rangle_{\Omega\backslash\overline{\omega}} - \langle \mathbf{h_O} + \mu\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{H}, \mathbf{v}\rangle_O \\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega}),\ \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \ \text{ sur } \partial\omega\ , \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega\backslash\overline{O}\ . \end{cases}$$

Puis on procède de la même manière que le cas $\boldsymbol{g} = 0$. ■

Maintenant on énonce et on prouve un résultat de régularité locale sur la solution

du problème de Stokes avec des conditions aux limites mixtes. On présente d'abord les notations suivantes : pour $k, m \in \mathbb{N}, k < m$ et pour deux ensembles ouverts Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_2 \subset \Omega_1$, on note $X^{k,m}(\Omega_1, \Omega_2)$ l'espace des fonctions dans $\mathbf{H}^k(\Omega_1)$ telles que leur restriction à Ω_2 appartient à $\mathbf{H}^m(\Omega_2)$. De même, on désigne par $X^{*,m}(\Omega_1, \Omega_2)$ l'espace des fonctions dans $\left[\mathbf{H}^1(\Omega_1)\right]'$ telles que leur restriction à Ω_2 appartient à $\mathbf{H}^m(\Omega_2)$.

Théorème A.2 *(Résultat de régularité locale). Soit $k \in \mathbb{N}$, $\mu > 0$, Ω un ensemble ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) et ω un ensemble ouvert avec un bord $C^{k+1,1}$ tel que $\omega \subset\subset \Omega$ et $\Omega\backslash\overline{\omega}$ est connexe. Soit O un sous-ensemble ouvert du bord extérieur $\partial\Omega$. Soit C et C' deux sous-ensembles ouverts et réguliers de $\Omega\backslash\overline{\omega}$ tels que $\partial\omega \subset \partial C$, $\partial\omega \subset \partial C'$, $\overline{C} \backslash \partial\omega \subset C'$ and $\overline{C'} \subset \Omega$.Soit*

$$(\mathbf{f}, g, \mathbf{h}_O, \mathbf{h}_{ext}, \mathbf{h}_{int}) \in \mathbf{X}^{*,k}(\Omega\backslash\overline{\omega}, C') \times X^{0,k+1}(\Omega\backslash\overline{\omega}, C') \times \mathbf{H}^{-1/2}(O) \times \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega\backslash\overline{O}) \times \mathbf{H}^{k+\frac{1}{2}}(\partial\omega).$$

On considère $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega}) \times L^2(\Omega\backslash\overline{\omega})$ la solution du problème de Stokes suivant :

$$\begin{array}{rcll} -\mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p &=& \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \text{div } \boldsymbol{u} &=& g & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\omega} \\ -\mu\partial_{\mathbf{n}}\boldsymbol{u} + p\mathbf{n} &=& \mathbf{h}_O & \text{sur } O \\ \boldsymbol{u} &=& \mathbf{h}_{ext} & \text{sur } \partial\Omega\backslash\overline{O} \\ \boldsymbol{u} &=& \mathbf{h}_{int} & \text{sur } \partial\omega. \end{array} \tag{A.13}$$

Alors $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{H}^{k+2}(C) \times \mathbf{H}^{k+1}(C)$ et l'estimation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^{k+2}(C)} + \|p\|_{\mathbf{H}^{k+1}(C)} \cdot \\ \leq\ & C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{X}^{*,k}(\Omega\backslash\overline{\omega}, C')} + \|g\|_{X^{0,k+1}(\Omega\backslash\overline{\omega}, C')} + \|\mathbf{h}_O\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(O)} + \|\mathbf{h}_{ext}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega\backslash\overline{O})} + \|\mathbf{h}_{int}\|_{\mathbf{H}^{k+\frac{1}{2}}(\partial\omega)}\right) \end{aligned}$$

Démonstration. En premier, on considère le cas $k = 0$. On définit $\mathcal{V} = C \cup \overline{\omega}$, $\mathcal{V}' = C' \cup \overline{\omega}$

et $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tels que $0 \leq \varphi \leq 1, \varphi \equiv 1$ dans $\mathcal{V}$ et $\varphi = 0$ dans $\Omega \backslash \mathcal{V}'$. Soit

$$(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega \backslash \overline{\omega}) \times L^2(\Omega \backslash \overline{\omega})$$

la solution du problem (A.13) donnée par A.1. En utilisant (A.13) on vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mu\Delta(\varphi\mathbf{u}) + \nabla(\varphi p) & = & \widetilde{\boldsymbol{f}} & \text{dans } C' \\ \text{div}\,(\varphi\mathbf{u}) & = & \widetilde{\boldsymbol{g}} & \text{dans } C' \\ \varphi\boldsymbol{u} & = & \mathbf{0} & \text{sur } \partial\mathcal{V}' \\ \varphi\boldsymbol{u} & = & \mathbf{h}_{int} & \text{sur } \partial\omega, \end{array} \right.$$

où $\widetilde{\boldsymbol{f}} := \varphi\mathbf{f} - \mu\boldsymbol{u}\Delta\varphi - 2\mu\nabla\boldsymbol{u}\nabla\varphi + p\nabla\varphi \in \mathbf{L}^2(C')$ et $\widetilde{\boldsymbol{g}} := \varphi g + \boldsymbol{u}.\nabla\varphi \in \mathbf{H}^1(C')$. D'après la régularité des solutions des équations de Stokes avec les conditions de Dirichlet sur le bord (voir par exemple [9] ou [21]), $\varphi\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(C')$, $\varphi p \in \mathbf{H}^1(C')$ et d'après l'expression de $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{g}}$ on obtient

$$\begin{aligned} &\|\varphi\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^2(C')} + \|\varphi p\|_{\mathbf{H}^1(C')} \\ &\qquad \leq C\left(\|\varphi\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{L}^2(C')} + \|\varphi g\|_{\mathbf{H}^1(C')} + \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})} + \|p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})} + \|\mathbf{h}_{int}\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)}\right) \end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité et l'estimation sur $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega\backslash\overline{\omega})}$ et $\|p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega\backslash\overline{\omega})}$ donnée par A.1, on obtient l'estimation annoncée pour $k = 0$. On procède ensuite par induction pour les cas $k \geq 1$. ■

Bibliographie

[1] L. Afraites, M. Dambrine, K. Eppler and D. Kateb. Detecting perfectly insulated obstacles by shape optimization techniques of order two. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 8(2) :389-416 (electronic), 2007.

[2] L. Afraites, M. Dambrine and D. Kateb. On second order shape optimization methods for electrical impedance tomography. SIAM J. Control Optim., 47(3) :1556-1590, 2008.

[3] C. Alvarez, C. Conca, L. Friz, O. Kavian and J.H. Ortega. Identification of immersed obstacles via boundary measurements. Inverse Problems, 21(5) :1531-1552, 2005.

[4] C.J.S. Alves, R. Kress and A.L Silvestre. Integral equations for an inverse boundary value problem for the two-dimensional Stokes equations. J. Inverse Ill-posed Probl. 15(5) :461-481, 2007.

[5] C. Amrouche and V. Girault. Problèmes généralisés de Stokes. Portugal Math.49(4) :463-503, 1992.

[6] C. Amrouche and V. Girault. Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension Czechoslovak Math. J. 44(119)(1) :109-140, 1994.

[7] M. Badra, F. Caubet, and M. Dambrine. Detecting an obstacle immersed in a fluid by shape optimization methods. Math. Models Methods Appl. Sci., 21(10) :2069-2101, 2011.

[8] A. Ben Abda , M. Hassine , M. Jaoua and M. Masmoudi. Topological sensitivity analysis for the location of small cavities in Stokes flow SIAM J.Control Optim.48(5) :2871-2900, 2009.

[9] F. Boyer and P. Fabrie. Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles. Vol. 52 of Mathématiques & Applications (Berlin : Springer-Verlag), 2006.

[10] H. Brezis. Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[11] D. Bucur and G. Buttazzo. Variational methods in shape optimization problems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 65. Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2005.

[12] A.P. Calderon. *On an inverse boundary value problem, in Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continum Physics*, W.H.Meyer and M.A Raupp, eds, Rio de Janeiro, 1980, Soc.Brasil. Mat.,Rio de Janeiro, Brasil, pp.65-73, 1980.

[13] F. Caubet, M. Dambrine, D. Kateb and C. Z. Timimoun. A Kohn Vogelius formulation to detect an obstacle immersed in a fluid. Inverse Problems and Imaging, pages 123 - 157, Volume 7, Issue1, February 2013.

[14] C. Conca, P. Cumsile, J. Ortega and L. Rosier. Detecting a moving obstacle in an ideal fluid by a boundary measurement. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346(15-16) :839-844, 2008.

[15] C. Conca, M. Malik and A. Munnier. On the detection of a moving rigid solid in a perfect fluid. Inverse Problems 26(9) DOI=10.1088/0266-5611/26/9/095010, 2010

[16] M. Dambrine. On variations of the shape Hessian and sufficient conditions for the stability of critical shapes RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exaclas Fis. Nal. Ser. A Mal. 96(1) :95-121, 2002.

[17] M.C. Delfour, J.P. Zolésio. Shapes and Geometies : Analysis, Differential Calculus and Optimization, Advances in Design and Control, SIAM, Springer, Philadelphia, PA, Berlin, 2002.

[18] I. Ekeland, R. Temam, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Gauthier-Villars, 1974.

[19] K. Eppler and H. Harbrecht. A regularized Newton method in electrical impedance tomography using shape Hessian information. Control Cybernet., 34(1) :203-225, 2005.

[20] C. Fabre, J. P. Puel, E. Zuazua, Approximate controllability of the semilinear heat equation, Proceedings of the Royal Society. Edinburg, no. 125A , pp. 31–61, 1995.

[21] G. P. Galdi. An introduction to the mathematical theory of the navier-Stokes equations ; Vol. 38 of Springer Tracts in Natural Philosophy Springer-Verlag (New York Linearized stcady problems), 1994.

[22] G. Grubb and V.A. Solonnikov. Boundary value problems for the nonstationary Navier-Stokes equations treated by pseudo-differential methods. Math. Scand., 69(2) :217-290 (1992), 1991.

[23] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit, and Pierre Pierre-Gilles De Genne. *Hydro-dynamique physique,* 2001.

[24] A. Henrot and M. Pierre, Variation et optimisation de formes. Springer-Verlag, Mathématiques et Applications, V. 48, 2005.

[25] F. Hettlich. Frechet derivatives in inverse obstacle scattering, Inverse Problems 11, 371-382, 1995.

[26] F. Hettlich, The Landweber iteration applied to inverse conductive scattering problems, Inverse Problems 14, 931-947, 1998.

[27] G.C. Hsiao and W.L. Wendland, Boundary Integral Equations. App. Math. Sc. V. 164. Springer-Verlag Berlin.

[28] Lev Landau and Evguéni Lifchitz. *Physique théorique. Volume 6, Mécanique des fluides*. 1989.

[29] J.-L. Lions, Controle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles,Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[30] J.-L. Lions and M. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications 1 & 2,Dunod, Paris, 1988.

[31] J.-L. Lions, Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes, Recherches en mathématiques appliquées RMA, no. 21, Masson, 1992.

[32] D. Martin. Finite Element Library Melina http ://homepage.mac.com/danielmartin/melina/.

[33] V. Maz'ya and T. Shaposhnikova, Theory of multipliers in spaces of differentiable functions, Vol. 23 of Monographs and Studies in Mathematics Pitman (Advanced Publishing Program) (Boston MA), 1985.

[34] F. Murat and J. Simon. Sur le controle par un domaine géométrique. Rapport du L.A. 189, . Université de ParisVI, France, 1976.

[35] Y. Miloudi, O. Nakoulima and A. Omrane. A method of detection of pollution in distributed systems of incomplete data, ESAIM : Proceedings, Control, Set-Valued Analysis and Application, Vol.17, pp 67-79, 2007.

[36] Y. Miloudi, O. Nakoulima and A. Omrane. Instantaneous sentinels for problems of incomplete data, Inverse Probl. Sci. Eng. 17, No. 4, 451-459, 2009.

[37] Y. Miloudi and C. Z. Timimoun. Approximate controllability with constraint on the control for the heat equation, J. Nonl. Evol. Equ. Appl. (8) pp. 97-112, 2012.

[38] Z. Mizohata. Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A, 31, pp 219-239, 1958.

[39] A.I. Nachmann, *Reconstruction from boundary measurement*, Ann. of Math., 128, 531-576, 1988.

[40] A.I. Nachmann, *Global uniqueness for a two dimensional inverse boundary value problem*, Ann. of Math., 143,, 71-96, 1996.

[41] O. Nakoulima, Contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339, pp 405-410, 2004.

[42] O. Nakoulima. A revision of J. L. Lions' notion of sentinels. Portugaliae Mathematica. Portugal . Math. Vol. 65, Fasc. 1, 1-22, 2008.

[43] J. Nocedal and S. J. Wright. Numerical optimization. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, second edition, 2006.

[44] R.G. Novikov. *A multidimensional inverse spectral problem for the equation* $\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$, Funksional. Anal. i Prilozhen. 22 , no 4,11-22,96 ; translation in funct. Anal. Appl. 22,263-272, 1988.

[45] J.-H. Ortega and E. Zuazua, On a constrained approximate controllability problem for the heat equation, Journal of Optimization Theory and Applications 108 no. 1, pp. 29–63, 2001.

[46] J.-P. Puel, Controlabilité approchée et controlabilité exacte, Notes de cours de D.E.A., Université Pierre et Marie Curie, Paris (2001).

[47] J. R. Shewchuk. Mesh Generator Triangle. http ://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html.

[48] J. Simon, Differentiation with respect to the domain in boundary value problems. Numer. Funct. Anal. Optim, 2 : 649-687, 1980.

[49] J. Simon, Second variation for domain optimization problems,In Control and estimation of distributed parameter systems (Vorau, 1988), volume 91 of Internat. Ser. Numer. Math.,pages 361-378. Birkhauser, Basel, 1989.

[50] J. Sokolowski and J.P. Zolesio, Introduction to Shape Optimization : Shape Sensitivity Analysis, Series in computational Mathematics, Springer-Verlag, Vol 16, 1992.

[51] J. Sylvester, and G. Uhlmann, *A global uniqueness for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math. 125, 153-169, 1987.

Résumé

Cette thèse fait l'étude de deux problèmes inverses :

Dans une première partie, on étudie la contrôlabilité approchée avec contraintes linéaires sur le contrôle pour les problèmes distribués. On trouve ce type de problèmes dans l'étude des sentinelles instantannées approchées qui sont des outils d'analyse mathématique de systèmes à données manquantes que l'on rencontre dans des problèmes de pollution.La notion de sentinelle est due à J. L. Lions . Le concept a ensuite été généralisé par O. Nakoulima . Brièvement, une sentinelle est la donnée d'une observation de support un ouvert $\mathcal{O}$ appelé observatoire et d'une fonction (la sentinelle proprement dite) définie par l'observation et un contrôle de support un ouvert ω distinct de $\mathcal{O}$.

La notion de sentinelle de Lions où le contrôle et l'observation sont dans le même support $\omega = \mathcal{O}$ devient ainsi un cas particulier.

Dans une seconde partie, on s'intéresse à la reconstruction d'une inclusion ω immergée dans un fluide contenu dans un plus grand domaine borné Ω, par une mesure sur le bord $\partial\Omega$. Le mouvement du fluide est gouverné par les équations de Stokes. On étudie le problème inverse de reconstruction de ω grâce aux méthodes d'optimisation de forme en définissant la fonctionnelle coût Kohn-Vogelius. Afin d'étudier la stabilité de ce problème, on montre la compacité de l'opérateur de Riesz correspondant au Hessien de forme de cette fonctionnelle en un point critique ce qui explique pourquoi le problème inverse est mal posé. Ainsi on a besoin de méthodes de régularisation pour le résoudre numériquement.

Mots clefs : Problème inverse, Contrôlabilité approchée, Sentinelle discriminante, Equation de la chaleur, Equations de Stokes, Dérivée de forme, Identifiabilité, Fonctionnelle coût, Instabilité, régularisation.

Résumé :

Cette thèse fait l'étude de deux problèmes inverses :

Dans une première partie, on étudie la contrôlabilité approchée avec contraintes linéaires sur le contrôle pour les problèmes distribués. On trouve ce type de problèmes dans l'étude des sentinelles instantanées approchées qui sont des outils d'analyse mathématique de systèmes à données manquantes que l'on rencontre dans des problèmes de pollution. La notion de sentinelle de Lions où le contrôle et l'observation sont dans le même support $\omega = O$ devient ainsi un cas particulier.

Dans une seconde partie, on s'intéresse à la reconstruction d'une inclusion ω immergée dans un fluide contenu dans un plus grand domaine borné Ω, par une mesure sur le bord $\partial\Omega$. Le mouvement du fluide est gouverné par les équations de Stokes. On étudie le problème inverse de reconstruction de ω grâce aux méthodes d'optimisation de forme en définissant la fonctionnelle coût Kohn-Vogelius. Afin d'étudier la stabilité de ce problème, on montre la compacité de l'opérateur de Riesz correspondant au Hessien de forme de cette fonctionnelle en un point critique ce qui explique pourquoi le problème inverse est mal posé. Ainsi on a besoin de méthodes de régularisation pour le résoudre numériquement.

Mots clefs :

Problème inverse; Contrôlabilité approchée; Sentinelle discriminante; Equation de la chaleur; Equations de Stokes; Dérivée de forme; Identifiabilité; Fonctionnelle coût; Instabilité; Régularisation.